算子方程投影解法

雷晋干　黄象鼎　著

武汉大学出版社

算子方程投影解法

雷晋干　黄象鼎 著

武汉大学出版社

1987

内容提要

投影解法（有限元法、配置法等均可视为其特例）是求数学物理问题近似解的常用方法之一．本书试图以泛函分析为工具来研究投影解的存在性、收敛性及其误差估计的有关问题．全书共分四章，第一章介绍集合序列及算子序列的收敛性概念．二、三、四章分别介绍线性、非线性问题以及特征值问题的投影解法．

本书可以作为计算数学专业研究生或高年级大学生选修课读本，也可供计算数学工作者及有兴趣于泛函分析应用的科技人员参考．

算子方程投影解法

雷晋干　黄象鼎　著

武汉大学出版社出版

（武昌　珞珈山）

新华书店湖北发行所发行　　武汉大学印刷厂印刷

850×1168毫米　1/32　8.625印张　216千字

1987年12月第一版　1987年12月第一次印刷

印数：1—1350

ISBN 7—307—00178—0/0·18

统一书号：13279·56　　定价：1.70元

序　言

数学物理中所出现的众多的微分方程、积分方程或微分积分方程的求解，可以看成无穷维函数空间中算子方程的求解问题．而为获得它们的近似解或数值解，需要采用近似方程来代替原方程并求其解．建立近似方程并设计相应的解法的手段是多种多样的，其中投影方法（如众所周知的 Галеркин 方法、配置法、最小二乘法均为其特例）是常用的方法之一．本书试图以泛函分析为工具来研究投影解的存在性、收敛性以及误差估计等有关问题．对于非线性问题，由于其解往往是不唯一的，基于此，本书对线性或非线性问题都将原问题的解与近似解看成是某些集合的元素，而把近似解的收敛性问题看成是集合序列的收敛性问题．用这种方式处理收敛性是十分自然的，同时某些点列意义下不收敛的解序列，在这种集合意义下却可能收敛．解集合序列的收敛性又直接依赖于算子方程中的算子的性质以及相应的近似算子对原算子的逼近方式．本书中，我们讨论了一类非常广泛的正规算子方程的近似解的有关问题．

本书是在我们近几年来为本校计算数学专业研究生开设的算子方程数值解讨论班中的部分题材以及数值泛函课中部分内容的基础上加工整理而成的，同时也参照了国内外有关的一些近期成果，也有参加讨论班诸同志近几年来所做的工作．

读者只需具备最基本的泛函分析以及数值分析知识就可比较顺利地阅读本书．因此它可作为计算数学专业研究生或高年级大学生的选修课教本，也可供计算数学工作者及关心泛函分析应用

的科技人员参考.

全书共分四章，第一章是预备性的，介绍集合及算子序列收敛的一些基本概念。第二、三章分别讨论了线性与非线性算子方程的投影解，第四章对特征值及歧点问题的投影解作了初步介绍。

本书虽然只限于讨论算子方程的投影解，但是讨论收敛性的方法（即所谓列紧性方法）对于更一般的近似算子方程也适合。因此在各章中，我们总是从一般性的定理入手讨论其近似解的收敛性，然后再具体到投影方程的情形。为了理解与应用这些理论分析，每一章都给出一定数量的例子。书的最后还给出三个附录，简明地（绝大部分无证明）叙述了正文中所用到的某些结论，目的是希望为读者阅读正文时提供一些方便。

本书稿虽经一再教学试用过，但由于我们水平所限，疏忽及不妥之处一定难免，敬请读者批评指正。

中山大学陈铭俊教授仔细审阅了本书初稿，提出了很多宝贵意见，本校费浦生副教授及饶传霞同志也提出了很多好建议，在此谨向他们致以衷心的感谢。

雷晋干　黄象鼎

1985年12月于武汉大学

关于记号的说明

$\in$： 属于

$\subset$： 包含

$\subsetneq$： 严格包含

$\cup$： 并

$\cap$： 交

$\exists$： 存在量词

$\forall$： 全称量词

$\varnothing$： 空集

$\longrightarrow$： 收敛

$\xrightarrow{p}$： 点态收敛

$\xrightarrow{c}$： 连续收敛

$\xrightarrow{ac}$： 渐近列紧收敛

$\xrightarrow{cc}$： 族列紧收敛

$\xrightarrow{r}$： 正规收敛

$\longrightarrow$： 弱收敛

$\xrightarrow{p}$： D-半点态收敛

$\xrightarrow{dc}$： D-半连续收敛

$\xrightarrow{dr}$： D-半正规收敛

$\Longrightarrow$： 蕴含

$\Longleftrightarrow$： 等价（互为蕴含）

$\{S_n\}^*$： 集合 $\{S_n\}$ 的聚点集

$\Omega_\varepsilon(S)$： 集合 S 的 ε-邻域

P_nA： 关于算子 A 的投影算子

目　录

第　一　章

集合序列和算子序列的收敛

在序言中，我们已经提到求解算子方程

$$Ax=f,\ x\in X,\ f\in Y, \tag{1.1}$$

$$x=Kx+g,\ x\in X,\ g\in X \tag{1.2}$$

的解经常采用其近似方程

$$A_nx=f_n,\ x\in X,\ f_n\in Y, \tag{1.3}$$

$$x=K_nx+g_n,\ x\in X,\ g_n\in X \tag{1.4}$$

来代替以求其近似解，这里 X、Y 均为抽象空间，A 为 X 到 Y 的算子，K 为 X 到 X 的算子，A_n、K_n 分别为算子 A、K 的近似算子．在考虑求近似解的过程中，自然要考虑近似方程(1.3)，(1.4)的解集合与原方程(1.1)，(1.2)的解集合的关系，算子 A_n、K_n 是否分别收敛于 A、K 以及以什么方式收敛于 A、K 的问题．为此，本章将介绍集合序列与算子序列收敛性的一些基本概念．

这里给出的概念虽然对距离空间一般也适用，但为实用与叙述方便起见，仍然设 X、Y 均为 Banach 空间，并记$L(X, Y)$为映 X 于 Y 的有界线性算子的全体，按定义它也是 Banach 空间．若 $X=Y$，则记 $L(X, X)$为 $L(X)$．往后，如果没有特殊声明，所有抽象空间都是实的．

1.1 列紧算子与正规算子

本书我们要讨论算子方程(1.1)，(1.2)，其中算子 A、K 分别限定为正规或列紧的。

记 $N=\{1,2,3,\cdots\}$为自然数集合，N 的无穷子集用 N'，N''等表示。

如果空间 X 的集合 D 的每一个开覆盖有有限的子覆盖，则称 D 为**列紧集**。如果 $\overline{D}$ 是列紧的，则称 D 为**相对列紧集**。如果 D 中每一个序列都有于 X 内收敛的子序列存在，则称 D为**序列列紧集**。如果对每个 $\varepsilon>0$，D 有有限 ε-网 $D_\varepsilon\subset X$，即对应于每一个 $x\in D$，存在一个 $x_\varepsilon\in D_\varepsilon$，使得 $\|x-x_\varepsilon\|<\varepsilon$，则称 D 为**全有界集**。若 D为列紧的，则 D 是闭的。又，下列说法是等价的：

D 是相对列紧的；

D 是序列列紧的；

D 是全有界的。

一般，全有界性将更多地用于理论证明中，但是，在我们的下文中，一种与序列列紧类同的概念——离散列紧，起着相当重要的作用。如果对于点列$\{x_n\}\subset X$ 的每一个子序列均有收敛的子序列，则称之为**离散列紧的**。以下简称离散列紧为 ***d*-列紧**。因此，如果任何属于 D 的无穷序列均是 d-列紧，则 D称为相对列紧的，有时也简称相对紧。

下述 Arzelà 定理对判断连续函数空间中的集合是否列紧是非常有用的。

定理（Arzelà） 使得定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数族成为 $C[a,b]$中的相对列紧集的必要且充分条件是这族函数一致有界且等度连续。

对于空间 $L^p(0,1)$上的函数族，一个类似的结果成立。

定理（Колмогоров） 设 M 为 $L^p(0,1)$ $(p>1)$ 中的集合，则集合 M 在 $L^p(0,1)$中相对列紧的充要条件是

1． 存在常数 k，使得

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt \leqslant k, \quad \forall\ x(t) \in M;$$

2． 对任一 $\varepsilon>0$，能找到 $\delta>0$，使得当 $|h|<\delta$时

$$\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p dt < \varepsilon^p, \ \forall x(t) \in M.$$

当 $t \overline{\in} [0,1]$时，定义 $x(t)\equiv 0$。

$K: X\to Y$，如果集 S 有界$\Rightarrow \overline{K(S)}$ 是列紧集，则称 K 为**列紧算子**（线性或非线性）。 (1.5)

显然，如果 K 有界且是有限秩算子（即值域属于有限维空间），则 K 是列紧的。

例1.1 考虑由积分

$$Kx(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

所定义的算子 K: $L^2[a,b]\to L^2[a,b]$，其中 $k(s,t)\in L^2([a,b]\times[a,b])$。不难验证，$K$ 是 $L^2[a,b]$上的列紧算子。

例1.2 假定 $k(s,t,u)$ 关于变量 $(s,t)\in[a,b]\times[a,b]$，$|u|\leqslant r$ 是连续的，则由积分

$$Au(s)=\int_a^b k(s,t,u(t))dt$$

所定义的算子 A 在连续函数空间中的半径为 r 的球 U 上是列紧的。

事实上，直接应用 Arzelà 定理则知结论成立。

例1.3 设 X 为 Соболев 空间 $W_2^1(0,1)$，$f(x,u)$为$[0,1]\times R$ 上的连续函数，且关于 u 满足李普希兹条件. 因而 $f(x,u)\in L^2(0,1)$，$\forall u\in W_2^1(0,1)$，从而积分

$$\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)dx,\ \forall\varphi、u\in W_2^1(0,1)$$

存在，于是对每一固定的 $u\in W_2^1(0,1)$，上述积分是 $W_2^1(0,1)$ 上的有界线性泛函，由 Riesz 表现定理*)，对每一个 $u\in W_2^1(0,1)$，存在 $v\in W_2^1(0,1)$，使

$$(v,\varphi)=\int_0^1 f(x,u)\varphi(x)dx,\ \ \forall\varphi\in W_2^1(0,1),$$

其中(v,φ)为 $W_2^1(0,1)$上的内积，从而可定义算子 F：$W_2^1(0,1)\to W_2^1(0,1)$：

$$v=Fu\Longleftrightarrow(v,\varphi)=\int_0^1 f(x,u)\varphi dx,\ \forall\varphi\in W_2^1(0,1).$$

可以证明，算子 F 是 $W_2^1(0,1)\to W_2^1(0,1)$ 的连续列紧算子. 事实上，设按 W_2^1 范数 $u_n\to u_0$，因

$$(Fu_n-Fu_0,\ Fu_n-Fu_0)=\int_0^1(f(x,u_n)-f(x,u_0))\times(Fu_n-Fu_0)dx,$$

故有
$$\|Fu_n-Fu_0\|_{W_2^1}\leqslant c\|u_n-u_0\|_{W_2^1},$$
从而 F 为连续算子. 又设$\{u_l\}\in W_2^1(0,1)$为有界集，由嵌入定理（见附录二），它在 $L^2(0,1)$中为相对紧，根据同样的算法，有

---

*) 对 Hilbert 空间 H 上的任一有界线性泛函 f，有唯一的元 $u\in H$，使 $f(x)=(u,x),x\in H$.

$$\|Fu_l - Fu_m\|_{W_2^1} \leqslant \|f(x, u_l) - f(x, u_m)\|_{L^2}$$

$$\leqslant c\|u_l - u_m\|_{L^2}.$$

从而$\{Fu_l\}$为相对紧，即 F 为连续列紧算子.

这个例子 的证明思路 将在讨论微分方程 广义解 中被采用.

算子 A: $X \to Y$，如果$\{x_n\}$ 有界，$\{Ax_n\}$ d-列紧$\Longrightarrow\{x_n\}$ d-列紧，则称 A 为**正规的**(regular)(线性或非线性). (1.6)

从定义得知，可以直观地认为正规算子是具有逆列紧性的算子.

不难证明，在集 $L(X, Y)$中的正规 算子 有闭值域. 事实上，若用 $N(A)$表示 A 的零点集，$R(A)$表示值域，并记 $B=\{x;\ \|x\|=1\}$，$S=B\cap N(A)$. 如果 A 为正规算子，因 S 有界且 $\overline{AS}=\{0\}$，从而$\overline{S}$ 列紧，并由此 推得 $\dim N(A)<+\infty$，即 $N(A)$为有限维子空间，于是存在闭集$F\subset X$使$X=N(A)\oplus F$. 记 A_F 为 A 在集合 F 上的限制，显然 $N(A_F)=\{0\}$，即 A_F 是一一对应映射，从而 A_F^{-1} 存在. 又因 $A\in L(X, Y)$是正规的，从而 A_F 也连续且正规，由此推得$\|A_Fx\|\geqslant\alpha\|x\|$$(\alpha>0)$，$x\in F$. 因若不然，存在序列 $\{x_n\}$，$\|x_n\|=1$，$A_Fx_n\to 0$，利用正规性条件$\{x_n\}$$d$-列紧，不失一般性，设 $x_n\to x$，从而 $A_Fx=0$，$\|x\|=1$，此与 $N(A_F)=\{0\}$矛盾，从而 A_F^{-1} 有界且 $R(A_F)$是闭的，因为 $R(A_F)=R(A)$，故 A 有闭值域.

有的文献也称 正规算子 为固有算子(proper operator).

例1.4 如果 $A\in L(X, Y)$，而且

$$\|Ax\|\geqslant\alpha\|x\|, \quad \forall x\in X, \quad \alpha>0,$$

则 A 是正规算子，因为此时存在连续的逆算子 A^{-1}，且因 $R(A)$ 闭的. 由正规性定义得知 A 正规.

例1.5 设 A: $X\to X$为压缩算子

$\|Ax_1-Ax_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|$，$\forall x_1, x_2\in X$，$\alpha<1$ 而 I 为恒等算子，则 $T\equiv I-A$ 为正规算子. 事实上，假定$\{x_n\}\subset X$ 是有界序列且$\{x_n-Ax_n\}$是d-列紧集，则由于 A 的压缩性得知 T^{-1} 存在而且连续，根据假定$\{g_n\}=\{Tx_n\}$是 d-列紧的，从而$\{x_n\}$也是 d-列紧的.

例1.6 设 K：$X\to X$ 是列紧算子，则 $I-K$ 是正规算子. 事实上，设$\{x_n\}$有界，$n\in N$，则$\{Kx_n\}d$-列紧，即存在 $y\in X$，$Kx_n\to y$，$n\in N'\subset N$. 又设$\{x_n-Kx_n\}d$-列紧，$n\in N$，从而当 $n\in N'$ 时$\{x_n-Kx_n\}$也是 d-列紧的. 设 $y_0\in X$ 使 $x_n-Kx_n\to y_0$，$n\in N''\subset N'\subset N$，从而 $x_n\to y_0+y$，$n\in N''$. 此即表明$\{x_n\}$也是 d-列紧的. 类似地，$\lambda I-K$ 也是正规算子，其中 $\lambda\neq 0$ 为实数.

最后指出，在 Banach 空间中，列紧算子的任何有限线性组合仍然是列紧算子；对于正规算子，这个一般性结论虽不成立，但有很多实用场合仍然具有这一性质.

1.2 集合序列的收敛性

集合序列的收敛性概念与近似解的收敛性有着直接关系.

集合 S 的 **ε-邻域**表示为

$$\Omega_\varepsilon(S)=\bigcup_{x\in S}\{y\in X;\ \|x-y\|<\varepsilon\},\ \varepsilon>0.$$

类似于空间 X 的点的收敛性，定义集合的收敛性如下：

设 S，$S_n\subset X$，$n\in N$. 如果对任意 $\varepsilon>0$，存在一个 n_ε，使当$n\geqslant n_\varepsilon$ 时，$S_n\subset\Omega_\varepsilon(S)$，则称 **$S_n$ 收敛于 S**，并记 $S_n\to S$. 简言之为

$$S_n\to S，如果\ \forall\varepsilon>0，\forall n\ 充分大，S_n\subset\Omega_\varepsilon(S). \tag{1.7}$$

例1.7 设 X 为实数空间，$S=\{0\}$，$S_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$n\in N$，则 $S_n\to S$，$n\to\infty$.

例1.8 设 $S=[0,1]$，$S_{2m}=\left\{1+\frac{1}{2m}\right\}$，

$S_{2m+1}=\left\{-\frac{1}{2m+1}\right\}$，$m\in N$，则当$n\to\infty$ 时有 $S_n\to S$。

例1.9 设 $S=\{x:\ 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x:\ 2\leqslant x\leqslant 3\}$

$$S_n=\left\{x:\ 2-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 3\right\},\ n\in N,$$

则 $S_n\to S$。

例1.10 设 X_n 为 Banach 空间 X 的有限维子空间，而且 $X_n\subset X_{n+1}$，$n\in N$，$\overline{\cup X_n}=X$。今记

$$S=\{y:\ \|y\|\leqslant 1\},\ S_n=\{y:\ y\in S\cap X_n\},$$

显然 $S_n\to S$。

在例1.9中，如果设 $S=\{x:\ 2\leqslant x\leqslant 3\}$，显然 $S_n\to S$ 也成立。因此，上述极限并非唯一，而且一般有

$$S_n\to S\subset S'\Rightarrow S_n\to S'. \tag{1.8}$$

对于空集合 $\varnothing$，$\Omega_s(\varnothing)=\varnothing$，而且有

$$S_n\to\varnothing\Rightarrow S_n=\varnothing,\ \forall n \text{ 充分大}; \tag{1.9}$$

$$S_n=\varnothing,\ \forall n \text{ 充分大}\Rightarrow S_n\to S,\ \forall S\subset X. \tag{1.10}$$

集合$\{x_n\}$，$\{S_n\}$的**聚点集**分别定义为

$$\{x_n\}^*=\{x\in X:\ x_n\to x,\ n\in N'\}, \tag{1.11}$$

$$\{S_n\}^*=\{x\in X:\ x_n\to x,\ x_n\in S_n,\ n\in N'\}. \tag{1.12}$$

所有聚点集合均为闭集合。

类似于点列的 d-列紧，可定义**集合列的 d-列紧**。

如果每一个序列$\{x_n:\ x_n\in S_n,\ n\in N'\}$均有收敛子序列，则集合列$\{S_n\}$称为 **$d$-列紧**。显然

$$\{S_n\}d\text{-列紧},\ \{S_n\}^*=\phi\Rightarrow S_n=\phi,\ \forall n \text{ 充分大}, \tag{1.13}$$

$$\{\overline{S}_n\}^*=\{S_n\}^*. \tag{1.14}$$

例1.11 若 $S_n=\left\{\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right\}$，则 $\{S_n\}^*=\{0,1\}$，$S_n\to\{S_n\}^*$，而且 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的。

下面的定理刻划了 d-列紧集合列一个重要性质，它在讨论近似解的收敛性时起着基本作用。

定理1.1 a）$\{S_n\}$ 是 d-列紧的充要条件为 $\{S_n\}^*$ 列紧，$S_n\to\{S_n\}^*$。

b）设 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的，$\{S_n\}^*\subset S$，则 $S_n\to S$。

证 很明显，若 a)成立，则 b)也成立。现证明 a)。

假定 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的，令 $x_i\in\{S_n\}^*$，$i\in N$，于是存在 $n_i<n_{i+1}$ 及 $x_{n_i}\in S_{n_i}$ 使得 $\|x_{n_i}-x_i\|\to 0$。又因为 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的，故存在 N' 及 $x\in X$ 使得 $x_{n_i}\to x$，$i\in N'$。因此 $x_i\to x$，$i\in N'$，即 $\{S_n\}^*$ 是列紧集合。

假定 $S_n\to\{S_n\}^*$ 不成立，则存在 $\varepsilon>0$，N' 及 $x_n\in S_n$，$n\in N'$ 使得对一切 $n\in N'$ 及 $x\in\{S_n\}^*$ 有 $\|x_n-x\|>\varepsilon$，因此，$\{x_n: n\in N'\}^*=\varnothing$，并由此得知 $\{S_n\}$ 不是一个 d-列紧集，这一矛盾推得 $\{S_n\}$ 是 d-列紧时必有 $S_n\to\{S_n\}^*$，至此必要性得证。

反之，假定 $\{S_n\}^*$ 列紧以及 $S_n\to\{S_n\}^*$，证明 $\{S_n\}$ 是 d-列紧的。取 $x_n\in S_n$，$n\in N'$，因 $S_n\to\{S_n\}^*$，故存在 $N''\subset N'$，及 $x^m\in\{S_n\}^*$，$m\in N''$，$\|x_{n(m)}-x^m\|\to 0$，$n(m)\in N''$，$n(m)\to\infty$。又因为 $\{x^m\}$ 是 d-列紧的，故存在 $N'''\subset N''$，使 $m\in N'''$，$x^m\to x\in X$。从而 $x_{n(m)}\to x$，$n\in N'''$，$x_{n(m)}\in S_{n(m)}$，即 $\{S_n\}$ d-列紧。

1.3 算子序列的点态收敛与一致收敛

算子序列的收敛性概念与算子的近似表示法有着直接的联系。

设 T、T_n：$X\to Y$，$n\in N$。如果

$$T_n x \to Tx,\ 当\ n \to \infty,\ \forall x \in X \tag{1.15}$$

成立，则称算子 T_n **点态收敛于 T**，记为 $T_n \xrightarrow{p} T$；如果极限过程 $T_n x \to Tx$，$n \to \infty$ 对 $x \in X$ 一致地成立，即对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在常数 k 使得 $n \geqslant k$ 时，不等式

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$$

对一切 $x \in X$ 均成立，此时称 T_n 一致收敛于 T。显然 T_n 一致收敛于 T 时必然点态收敛于 T，反之则不一定。如果 T_n、$T \in L(X, Y)$，此时一致收敛应理解为按范数收敛，即 $\|T_n - T\| \to 0$。

例1.12 设 $X = l^2$ 且有标准基为 $\{e_i\}$，$i \in N$。又记 $X_n = [e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}, e_n]$，$n \in N$ 为由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 所生成的空间，于是当 $T_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ 时，$T_n \xrightarrow{p} I$，其中 I 为恒等算子。又若设 $T_n x = \frac{1}{n} x$，则 T_n 一致收敛于0算子。

当 T_n、$T \in L(X, Y)$ 时，$n \in N$，有下面两个常用的定理。

定理1.2 $T_n x \to Tx$，$\forall x \in X$ 成立的必要且充分条件为

1. $\{\|T_n\|\}$ 有界；
2. 在 X 的一个稠密子集 G 上

$$T_n x \to Tx,\ \forall x \in G.$$

证 可参考一般泛函分析教科书。

定理1.3 若 $T_n x \to Tx$，$\forall x \in X$，则在 X 的任一个相对列紧子集上，T_n 一致收敛于 T。

证 设 U 是 X 中的相对紧集，则对任一个 $\varepsilon > 0$，U 可用有限个 ε- 网所覆盖，因此，对每一个 $x \in U$，存在 x_ε，使得 $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$，这样的 x_ε 只有有限个，于是由不等式

$$\|(T_n-T)x\|\leqslant\|(T_n-T)(x-x_s)\|+\|(T_n-T)x_s\|$$

$$\leqslant(\|T_n\|+\|T\|)\varepsilon+\max_{x_s}\|(T_n-T)x_s\|,$$

立刻推得所要的结果。

1.4 算子序列的连续收敛

从本节开始，到本章结束若没有另外的声明都假设 T_n、T: $X\to Y$, $n\in N$。如果

$$x_n\to x\Longrightarrow T_nx_n\to Tx,\ \forall x\in X, \tag{1.16}$$

则称算子 T_n **连续收敛于** T，记为 $T_n\xrightarrow{c}T$。等价地，我们说 $T_n\xrightarrow{c}T$，是指

$$x\to x_0\Longrightarrow T_nx\to Tx_0,\ \forall x_0\in X. \tag{1.17}$$

如果 T_n、$T\in L(X,Y)$，易证 $T_n\xrightarrow{p}T$ 与 $T_n\xrightarrow{c}T$ 是等价的。

事实上，若 $T_n\xrightarrow{p}T$，则由定理1.2，存在常数 M，使 $\|T_n\|\leqslant M$, $n\in N$，由不等式

$$\|T_nx_n-Tx\|\leqslant\|T_nx_n-T_nx\|+\|T_nx-Tx\|$$

$$\leqslant M\|x_n-x\|+\|T_nx-Tx\|$$

得知 $T_n\xrightarrow{c}T$。相反的情况是明显的，只要取 $x_n=x$。

利用这一事实可证

定理1.4 设 T_n、$T\in L(X,Y)$ 且 $T_n\xrightarrow{p}T$, K: $Z\to X$ 是连续算子(不必线性)，则算子 T_nK、TK: $Z\to Y$ 满足 $T_nK\xrightarrow{c}$

TK. 特别当$T_n \xrightarrow{p} I$时，便有 $T_nK \xrightarrow{c} K$.

证 设 $x_n, x \in Z$，且 $x_n \to x$，$n \to \infty$，由于 K 的连续性，故 $Kx_n \to Kx$，当 $n \to \infty$，又因 $T_n \xrightarrow{c} T$，从而 $T_nKx_n \to TKx$，即 $T_nK \xrightarrow{c} TK$

例1.13 设算子 K：$(-\infty, +\infty) \to l^2$ 定义为

$$Kt = \left\{ t^2,\ \frac{t^2}{2!},\ \frac{t^2}{3!},\ \cdots \right\},$$

又算子 T_n：$l^2 \to l^2$ 的定义如同例1.12，

$$T_nx = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i,$$

此时便有 $T_nK \xrightarrow{c} K$.

如果算子 T_n，T 不是线性有界算子，点态收敛一般不保证连续收敛，但是当算子列还是等同连续列或渐近连续列时，结论将会同样成立。

如果

$$\forall x_0 \in X，当 x \to x_0 时，\|T_nx - T_nx_0\| \to 0，\forall n \in N 一致地，\tag{1.18}$$

则 $\{T_n\}$ 称之为**等同连续列**。

如果

$$\forall x_0 \in X，当 x \to x_0，n \to \infty 时，\|T_nx - T_nx_0\| \to 0，\tag{1.19}$$

则$\{T_n\}$称之为**渐近连续列**。

从定义可以看出

$$\{T_n\}等同连续 \Longleftrightarrow \{T_n\}渐近连续且\ \forall n \in N，T_n 连续 \tag{1.20}$$

定理1.5 $T_n \xrightarrow{c} T$ 的充要条件是

1. $T_n \xrightarrow{p} T$,

2. $\{T_n\}$ 渐近连续.

证 若 $T_n \xrightarrow{c} T$，令 $x_n = x$ 便得到 $T_n \xrightarrow{p} T$. 由不等式

$$\left| \|T_n x - T_n x_0\| - \|T_n x - T x_0\| \right| \leqslant \|T_n x_0 - T x_0\|$$

立刻推得 $\{T_n\}$ 渐近连续，必要性得证. 利用此不等式，同样可证条件1，2是充分的.

1.5 算子序列的列紧收敛

如果

$$S \text{ 有界} \Longrightarrow \overline{\bigcup T_n(S)} \text{ 列紧}, \qquad (1.21)$$

则算子列$\{T_n\}$称为**族列紧**.

如果

$$S \text{ 有界} \Longrightarrow \{T_n(S)\} d \text{ 列紧}, \qquad (1.22)$$

则算子列$\{T_n\}$称为**渐近列紧**.

根据集合的列紧性定义以及集合序列的 d- 列紧性定义可以得知，在 Banach 空间中，对任何集合序列$\{S_n\}$，集合 $\overline{\bigcup S_n}$ 成为列紧的充要条件是 $\{S_n\}d$- 列紧，而且对任一个 $n \in N$，$\overline{S}_n$ 列紧. 据此容易证明

$$\{T_n\}\text{族列紧} \Longleftrightarrow \{T_n\}\text{渐近列紧且 } T_n \text{ 列紧}, \ \forall n \in N. \qquad (1.23)$$

如果

$$T_n \xrightarrow{c} T, \ \{T_n\}\text{族列紧}, \ \forall n \in N, \ T_n\text{连续}, \qquad (1.24)$$

则算子列$\{T_n\}$ 称为**族列紧收敛**于 T，记作 $T_n \xrightarrow{cc} T$.

由定理1.5以及渐近连续的定义，可以证明，$\{T_n\}$ 族列紧收

敛于 T，如果

$$T_n \xrightarrow{p} T，\{T_n\}\text{族列紧且等同连续}. \qquad (1.25)$$

如果

$$T_n \xrightarrow{c} T，\text{且}\{T_n\}\text{渐近列紧}， \qquad (1.26)$$

则算子列$\{T_n\}$称为**渐近列紧收敛**于 T，记作 $T_n \xrightarrow{ac} T$.

同样地，由定理1.5，$T_n \xrightarrow{ac} T$可以定义为，如果：

$$T_n \xrightarrow{p} T，\{T_n\}\text{渐近列紧且渐近连续}. \qquad (1.27)$$

一些文献也称 $T_n \xrightarrow{ac} T$ 为列紧收敛.

一般说来，族列紧收敛一定会导致渐近列紧收敛，反之则不一定成立.

例1.14 令$X = L^2(0,1)$或 $C[0,1]$，取 $Tx = 0$，$T_n x = \frac{1}{n}x$，则 $T_n \xrightarrow{ac} 0$，但 $T_n \xrightarrow{cc} 0$ 并不成立.

下述结果说明了这两种收敛性的关系：

$$T_n \xrightarrow{cc} T \Longleftrightarrow T_n \xrightarrow{ac} T，T_n\text{ 列紧且连续}，\ \forall n \in N. \qquad (1.28)$$

它可以由（1.20）与(1.23)直接推出.

例1.15 规定 $X = C[0,1]$，$u \in C[0,1]$时，$\|u\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |u(t)|$，考虑积分算子

$$Ku(s) = \int_0^1 k(s,t,u(t))dt,\ 0 \le s \le 1;$$

如果核 $k(s,t,v)$是 $R = [0,1] \times [0,1] \times (-\infty, +\infty)$ 上的连续

函数，则知 K 映空间 $C[0,1]$于自身且是列紧算子。如果用近似积分

$$K_n u(s)=\sum_{j=1}^{n} w_j^n k(s,t_j^n,u(t_j^n))$$

代替上述积分，其中 $0\leqslant t_j^n\leqslant 1$，而 w_j^n 为近似积分公式的权，便得到一列近似算子 K_n: $C[0,1]\to C[0,1]$，$n\in N$. 假定近似积分公式是收敛的，即

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^n x(t_j^n)\longrightarrow\int_0^1 x(t)dt,$$

这样，如果我们记 $\varphi_n x$ 为上述近似积分公式，φx 为积分公式，则 φ_n, φ 均为线性有界泛函，而且 $\|\varphi\|=1$，$\|\varphi_n\|=\sum\limits_{j=1}^{n}|w_j^n|$. 又因为 $\varphi_n\to\varphi$，由定理1.2得知

$$\|\varphi_n\|=\sum_{j=1}^{n}|w_j^n|\leqslant M<+\infty,\quad \forall n\in N,$$

其中 M 为一常数，从而当 $u(s)\in U=\{u;\ u\in C[0,1],\ \|u\|\leqslant 1\}$ 时

$$|K_n u(s)|=\left|\sum_{j=1}^{n} w_j^n k(s,t_j^n,u(t_j^n))\right|$$

$$\leqslant\|k(s,t,u)\|\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j^n|\right)\leqslant M\|K\|,$$

其中 $\|K\|=\max\{|k(s,t,u(t))|,\ 0\leqslant s,t\leqslant 1,\ u\in U\}$，从而 $\cup K_n(U)$ 是一致有界的。如果我们还能证明 $\{K_n u;\ n\in N,\ u\in U\}$ 是等同连续的，则 $\cup K_n(U)$ 是一致有界且等同连续族，从而由 Arzelà 定理得知它是相对列紧集；并由此知 $\{K_n\}$ 是族列紧算子列。

为证明 $\{K_n u(s);\ u\in U,\ n\in N\}$ 的等同连续性，考察

$$|K_n u(s+h) - K_n u(s)| = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j^n [k(s+h, t_j^n, u(t_j^n)) - k(s, t_j^n, u(t_j^n))] \right|,$$

并记 $k_{tv}(s)=k(s,t,v)$，由于 $k(s,t,v)$ 在 $[0,1]^3$ 上是一致连续的，于是 $\{k_{tv}(s):\ 0\leqslant t, v\leqslant 1\}$ 在 $[0,1]$ 上形成一等同连续函数族．于是，对给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|h|<\delta$ 时，对所有 t、v

$$|k(s+h,t,v)-k(s,t,v)|<\varepsilon/M.$$

因此，

$$|K_n u(s+h) - K_n u(s)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j^n|\right)\varepsilon/M<\varepsilon$$

对所有 $n\in N$ 及 $u\in U$ 成立．

进一步，我们还可以证明 $K_n \xrightarrow{cc} K$．事实上，由于近似积分的收敛性以及

$$|K_n u - K_n u_0| = \left|\sum_{j=1}^{n} w_j^n [k(s,t_j^n,u(t_j^n)) - k(s,t_j^n,u_0(t_j^n))]\right|,$$

由 $\sum\limits_{j=1}^{n}|w_j^n|$ 的有界性及 $k(s,t,v)$ 关于 v 的连续性得知 $\|K_n u - K_n u_0\|\to 0$，$\forall n\in N$ 及 $u\to u_0$，并有

$$\|K_n u - K u_0\|\to 0,\ n\to\infty \text{ 及 } u\to u_0.$$

当 $T_n, T\in L(X,Y)$ 时，由于 $T_n \xrightarrow{p} T$ 与 $T_n\xrightarrow{c} T$ 等价，因此定义 $T_n\xrightarrow{cc} T$ 的(1.24)可写为：

$$T_n \xrightarrow{p} T \text{ 且} \{T_n\} \text{ 族列紧}.$$

同样定义 $T_n\xrightarrow{ac} T$ 的(1.26)可写为：

$$T_n \xrightarrow{p} T \text{ 且} \{T_n\}\text{渐近列紧.}$$

1.6 算子序列的正规收敛

如果

$\{x_n\}$有界，$\{T_n x_n\}$ d 列紧$\Longrightarrow\{x_n\}d$- 列紧，并且$\{T_n\}$的每个子列也有此性质，　　(1.29)

则算子列$\{T_n\}$称为**渐近正规.**

如果

$$T_n \xrightarrow{c} T,\ \{T_n\}\text{渐近正规.} \tag{1.30}$$

则算子列$\{T_n\}$称为**正规收敛**于 T，记作 $T_n \xrightarrow{r} T$.

对于线性有界算子情形，由于点态收敛与连续收敛是等价的，因此，若 T_n、$T\in L(X, Y)$时，

$$T_n \xrightarrow{r} T \Longleftrightarrow T_n \xrightarrow{p} T,\ \{T_n\}\text{ 渐近正规.} \tag{1.31}$$

在线性有界算子情形，与正规收敛密切相关的一个概念是算子列的稳定性. 设 $T_n\in L(X, Y)$,如果存在 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$时，T_n^{-1} 存在且一致有界，则称$\{T_n\}$是稳定的.

定理1.6 若 T、$T_n\in L(X, Y)$. 且 $T_n \xrightarrow{r} T$，则$\{T_n\}$是稳定的充要条件是算子 T 存在逆 T^{-1}.

为了证明这一结论，需要下述两个引理.

引理1.1 设 $T_n \xrightarrow{r} T$，S 为有界闭集，则$\{T_n S\}^* = TS$.

证 设 S 为有界闭集，如 $y\in\{T_n S\}^*$，则有$\{x_n\}\subset S$，$n\in N'$ 使 $T_n x_n \to y$. 因 $T_n \xrightarrow{r} T$，故$\{x_n\}d$ 列紧，从而有 $N''\subset N'\subset$

N，$x_n \to x$，$n \in N''$ 且 $T_n x_n \to Tx$，即 $y = Tx$。因 S 为闭集，所以 $x \in S$，故 $y \in TS$，于是 $\{T_n S\}^* \subset TS$。

反之，若 $y \in TS$，即存在 $x \in S$ 使 $y = Tx$。而由 $T_n \xrightarrow{r} T$ 可推得 $T_n x \to Tx = y$，从而 $y \in \{T_n S\}^*$，即 $TS \subset \{T_n S\}^*$，故 $\{T_n S\}^* = TS$。

现记 $U = \{x;\ \|x\| = 1\}$。

引理1.2 $\{T_n\}$稳定$\Longleftrightarrow 0 \,\overline{\in}\, \{T_n U\}^*$。

证 首先我们指出，如果 $T \in L(X, Y)$，X、Y 为Banach空间，那末

$$\exists\ T^{-1} \Longleftrightarrow N(T) = \{0\} \Longleftrightarrow 0 \,\overline{\in}\, TU.$$

$\exists\ T^{-1}$ 有界$\Longleftrightarrow \exists\ \alpha > 0$，$\|Tx\| \geqslant \alpha \|x\|$，$x \in D(T)$。由于 $\{T_n\}$ 稳定，故当 n 充分大以后，T_n^{-1} 存在且一致有界，即 $\|T_n^{-1}\| \leqslant k$；由此推得 $\|T_n x\| \geqslant \alpha \|x\|$，$\alpha > 0$。若 $0 \in \{T_n U\}^*$，则存在 y_n 使 $y_n = T_n x_n$，$\|x_n\| = 1$，$y_n \to 0$，而由 $\|y_n\| = \|T_n x_n\| \geqslant \alpha \|x_n\|$ 推出 $x_n \to 0$，这与 $\|x_n\| = 1$ 矛盾，故 $0 \,\overline{\in}\, \{T_n U\}^*$。

反之，若 $0 \,\overline{\in}\, \{T_n U\}^*$，则知当 n 充分大后，$0 \,\overline{\in}\, T_n U$，由此推出 T_n^{-1} 存在。

现证 T_n^{-1} 一致有界，如不然，则有

$$\|x_m\| = 1,\quad \|T_n x_m\| \to 0,\quad n,\ m \to \infty.$$

此与 $0 \,\overline{\in}\, \{T_n U\}^*$ 矛盾。

现在转向证明定理1.6。

根据引理1.1，$\{T_n U\}^* = TU$；故由引理1.2知 $\{T_n\}$ 稳定$\Longleftrightarrow 0 \,\overline{\in}\, TU \Longleftrightarrow T^{-1}$ 存在。

在数值分析中，离散的正规收敛概念常常比正规收敛概念更便于应用。下面仍设 T_n、T：$X \to Y$，$n \in N$，又设 $X_n \subset X$ 为 X 的子空间。如果

$\{x_n\}$ 有界，$x_n \in X_n$，$\{T_n x_n\}d$-列紧 $\Longrightarrow$ $\{x_n\}d$-列紧，并且 $\{T_n\}$ 的每一个子列也有此性质， (1.32)

则称算子列 $\{T_n\}$ 为**离散渐近正规**。如果

$$T_n \xrightarrow{c} T,\ \{T_n\} \text{ 离散渐近正规}, \tag{1.33}$$

则称算子列**离散地正规收敛于** T，记为 $T_n \xrightarrow{r} T$（离散地）。

类似地，如果 T_n，$T \in L(X, Y)$，则

$$T_n \xrightarrow{r} T(\text{离散地}) \Longleftrightarrow T_n \xrightarrow{p} T,\ \{T_n\}\text{离散渐近正规}. \tag{1.34}$$

显然，若取 $X_n = X$，则离散渐近正规与渐近正规一致，一般

$$T_n \xrightarrow{r} T \Longrightarrow T_n \xrightarrow{r} T\ (\text{离散地}). \tag{1.35}$$

又若 $\{A_n\}$ 是离散渐近正规，而 $\{K_n\}$ 是渐近列紧，则 $\{A_n + K_n\}$ 也必然离散渐近正规，因为如取 $\{x_n\}$ 有界，$x_n \in X_n$，又设 $\{A_n x_n + K_n x_n\}d$-列紧时，存在 $N' \subset N$ 及 $y_0 \in Y$，使

$$A_n x_n + K_n x_n \to y_0,\ n \in N'.$$

又因 $\{K_n\}$ 渐近列紧，故存在 $N'' \subset N'$ 及 $y_1 \in Y$，

$$K_n x_n \to y_1,\ n \in N''.$$

因此

$$A_n x_n \to y_0 - y_1,\ n \in N'',$$

即 $\{A_n x_n\}(n \in N'')d$-列紧，由于 $\{A_n\}$ 是离散渐近正规，故推得 $\{x_n\}d$-列紧。

总结所述，即

$\{A_n\}$ 离散渐近正规，$\{K_n\}$ 渐近列紧 $\Longrightarrow$ $\{A_n + K_n\}$ 离散渐近正规。 (1.36)

并因此有

$A_n \xrightarrow{r} A$(离散地)，$K_n \xrightarrow{ac} K \Longrightarrow (A_n + K_n) \xrightarrow{r} (A+K)$（离散地）. (1.37)

例1.16 若 $K_n \xrightarrow{ac} K$，则

$$I - K_n \xrightarrow{r} I - K. \tag{1.38}$$

且有 $$I - K_n \xrightarrow{r} I - K\text{(离散地)}. \tag{1.39}$$

例1.17 若 H 为 Hilbert 空间，$A \in L(H)$且正定，即

$$(Ax, x) \geqslant \alpha \|x\|^2,\ \ \alpha > 0,\ \ \forall x \in H.$$

又设 P_n: $H \to H_n$ 线性有界且 $P_n = P_n^* = P_n^2$, $P_n \xrightarrow{p} I$，其中$H_n \subset H$ 为 n 维子空间($n \in N$)，则

$$P_n A \xrightarrow{r} A\text{(离散地)}. \tag{1.40}$$

为证明(1.40)，先证明$\{P_n A\}$离散渐近正规. 设 $\{x_n\}$ 有界，$x_n \in H_n$, $\{P_n Ax_n\}$ d-列紧，因$\{x_n\}$有界，又 H 为 Hilbert 空间，故存在 $N' \subset N$ 使 $x_n \rightharpoonup x$, $x \in H$, $n \in N'$，又因 $\{P_n Ax_n\}$ d-列紧，故存在 $N'' \subset N'$ 使得

$$P_n Ax_n \to y,\ \ y \in H,\ \ n \in N''. \tag{1.41}$$

因而当 $n \in N''$ 时

$$\begin{aligned}(P_n(Ax_n - Ax), x_n - x) &= (A(x_n - x), x_n - x) + \\ &+ (A(x_n - x), x - P_n x) \\ &\geqslant \alpha \|x_n - x\|^2 + (A(x_n - x), x - P_n x).\end{aligned} \tag{1.42}$$

由于 x_n 弱收敛于 x，于是利用(1.41)推得上式左端极限为零，又

因$\{x_n\}$有界且$P_n \xrightarrow{p} I$推得上式右端第二项极限为零，从而$x_n \to x$，$n \to \infty$，即$\{P_n A\}$为离散渐近正规。

现在设$x_n \to x$，由于$P_n \xrightarrow{p} I$及A有界，故$Ax_n \to Ax$且$P_n A x_n \to Ax$，即$P_n A \xrightarrow{c} A$，(1.40)式得证。

最后我们有必要指出，在往后的章节中大量采用正规收敛概念来讨论算子方程的近似可解性，这种理论与 A Proper 映射理论有非常相近的性质[13]，然而将近似解的收敛看成集合收敛问题，正规收敛概念则更为方便。

第 二 章

线性算子方程的投影解法

在数值求解算子方程时，投影方法是其中较为常用的一种方法。诸如 Галеркин 方法、最小二乘法、配置法以及有限单元法都属于投影方法。所谓投影方法是用算子的投影方程来代替原来的算子方程，用投影方程的解作为原方程的近似解。

本章将介绍线性算子方程投影解法的一些基本问题。我们将看到，近似解的收敛性常常可直接由上章所讨论的算子列的收敛性所导出。

2.1 投影算子和投影方程

设 X 为 Banach 空间，记 $L(X)$ 为 X 上一切有界线性算子的集合，$D(T)$为算子 T 的定义域，$R(T)$为 T 的值域，$N(T)$ 为 T 的零空间，X^* 为 X 的共轭空间。

算子 P：$X \to X$（或 $R(P)$）称为**投影算子**，如果它是线性有界的而且

$$P^2 = P. \tag{2.1}$$

由于 $(I-P)^2 = (I-2P+P) = I-P$，从而 $I-P$ 也是 X 上的投影算子。这里及以后 I 均认为是单位算子。又由于对任意 $x \in X$ 有 $x = Px + (x - Px)$，这表明 x 可以表示成按闭线性子空间 $M = \{y;\ y = Px,\ x \in X\}$ 与 $N = \{z;\ z = (I-P)x,\ x \in X\}$ 的元的直接和，这种直接和一般并没有要求是直交和。显然，子空间

M也是由集合$\{x: x=Px,\ x\in X\}$所组成，而子空间 N 即为集合$\{x: Px=0, x\in X\}$. 因此，利用投影算子的定义有如下分解关系：

$$\begin{cases} X=M\oplus N, \\ M=R(P)=N(I-P), \\ N=N(P)=R(I-P), \end{cases}$$

其中 M、$N\subset X$ 均为闭子空间，并称算子 P 为沿 N 投影 X 于 M 的投影算子，而 $I-P$ 为沿 M 投影 X 于 N 的投影算子.

反之，若 X 可以分解为两个闭子空间 M 和 N 的直接和，那末我们称满足关系：

$$\begin{aligned} &(\text{i})\quad Pu=u, \quad \forall u\in M, \\ &(\text{ii})\quad Pw=0, \quad \forall w\in N \end{aligned} \tag{2.3}$$

的线性有界算子 $P\in L(X)$为投影算子. 很明显，这样的算子 P 满足 $P^2=P$. 对于 X 的任一闭子空间M，是否存在投影算子 $P\in L(X)$，使得 $M=R(P)$ 有闭的补集呢？回答是否定的，除非 M 是有限维的或 X 是 Hilbert 空间.

我们记 H 为 Hilbert 空间，由于 Hilbert 空间具有正交分解性质，从而若设 M 为 H 的闭子空间时，一定有正交直接和：

$$H=M\oplus M^{\perp}, \tag{2.4}$$

其中 $M^{\perp}$ 表示 H 中一切与空间 M 正交的元素的总体. 因此，在上面的讨论中，若用 $M^{\perp}$ 代替 N，由此出发所定义的投影算子称之为**正交投影算子**.

显然，算子 P: $H\to R(P)$ 是正交投影时，必有 $(x-Px)\perp R(P)$，$x\in H$. 反之，P: $H\to R(P)$是线性有界且对于每一个 $x\in H$，$(x-Px)\perp R(P)$，则 P 为正交投影.

可以证明，Hilbert 空间中的任一个正交投影算子是自共轭

且非负的。

事实上，若记 P_M 为沿 $M^\perp$ 投影 H 于 M 的正交投影算子，$P_{M^\perp}$ 为沿 M 投影 H 于 $M^\perp$ 的正交投影算子，则对任意 x，$y \in H$

$$(P_Mx, y)=(P_Mx, P_My+P_{M^\perp}y)=(P_Mx, P_My)$$

$$=(P_Mx+P_{M^\perp}x, P_My)=(x, P_My),$$

即得自共轭性，又

$$(P_Mx, x)=(P_Mx, P_Mx+P_{M^\perp}x)=(P_Mx, P_Mx)$$

$$=\|P_Mx\|^2\geqslant 0, \quad \forall x\in H$$

即得非负性。

在 Banach 空间中，非零的投影算子 P 的范数一般是 $\|P\|\geqslant 1$，因为 $\|P\|=\|P^2\|\leqslant\|P\|^2$，即使在 Hilbert 空间中，如果投影算子不是正交投影，其范数一般也大于或等于 1．当算子是正交投影算子时，其范数 $\|P_M\|=1$，事实上，因 $x=P_Mx+P_{M^\perp}x$，从而

$$\|x\|^2=\|P_Mx\|^2+\|P_{M^\perp}x\|^2,$$

$$\|P_Mx\|\leqslant\|x\|, \quad 即 \quad \|P_M\|\leqslant 1.$$

另一方面，因为 $\|P_M\|\geqslant 1$，从而推出 $\|P_M\|=1$．

需要指出，在 Hilbert 空间中，如果投影算子 P_M: $H\to M$ 是正交的，根据正交分解的唯一性，可以推得这时投影有最优二乘逼近性质：

$$\|x-P_Mx\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|, \ \forall x\in H.$$

例2.1 设 $X=R^3$，并记 $e_1=(1, 0, 0)$，$e_2=(0, 1, 0)$，$e_3=$

$(0, 0, 1)$，$M=[e_1, e_2]$，$N=[e_3]$，则 $X=M\oplus N$。因此对任一 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in X$，

$$P_M\xi=(\xi_1, \xi_2, 0)=\xi_1e_1+\xi_2e_2,$$

$$P_N\xi=(0, 0, \xi_3)=\xi_3e_3.$$

例2.2 设 $X=l^2$，$e_1, e_2, \cdots$是它的标准基，即向量 e_i 的坐标分量除第 i 个为1外其余均为0，记 $X_n=[e_1, e_2, \cdots, e_n]$，若我们定义 P_n: $X\to X_n$ 为

$$P_nx=\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, \quad x\in l^2, \tag{2.5}$$

则 P_n 是 l^2 上的投影算子。

设 X 为具有可数基 $e_1, e_2, \cdots$（不一定正交）的实 Banach 空间，则任一元 $x\in X$ 可唯一表示为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_ie_i,$$

其中 ξ_i 是实数。现在定义泛函 f_k 使 $f_k(x)=\xi_k$，可证 $f_k(x)$ 是齐次可加且连续的[18]，从而 $f_k\in X^*$，因此 $\forall x\in X$ 有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f_i, x\rangle e_i,$$

其中$\langle f_i, x\rangle\equiv f_i(x)=\xi_i$。

设 $X_n=[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ 为由基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 所生成的 n 维空间，于是投影算子 P_n: $X\to X_n$ 可以表示为

$$P_nx=\sum_{i=1}^{n}\langle f_i, x\rangle e_i, \tag{2.6}$$

其中 $f_i\in X^*$，$e_i\in X$，$i=1, 2, \cdots, n$。

因为这时 $P_nx\to x$，$\forall x\in X$，$n\to\infty$，从而由定理1.2得知 $\|P_n\|\leqslant k$，k 为常数。

即使 X 是一般的 Banach 空间，如果 X_n 为 X 的有限维空间，并设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 X_n 的基，此时投影算子 P_n: $X \to X_n$ 也可表为

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle l_i, x \rangle e_i, \quad l_i \in X^*. \tag{2.7}$$

具体论证在此不再详述。

例2.3 设 $X = C[a, b]$，$\{t_{in}\}$ 为 $[a, b]$ 的一个分割，使得 $t_{1n} = a$，$t_{nn} = b$。又设 $\{e_i^n\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 为 $[a, b]$ 上的 n 个线性无关的连续函数，并使得 $e_i^n(t_{jn}) = \delta_{ij}$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$，这里 δ_{ij} 为 Kronecker 记号，即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

对每一个 $x \in C[a, b]$，定义有界线性算子 Π_n:

$$\Pi_n x = \sum_{i=1}^{n} x(t_{in}) e_i^n. \tag{2.8}$$

因此，若记 $X_n = [e_1^n, e_2^n, \cdots, e_n^n]$，则(2.8)式决定了一个投影算子 Π_n: $X \to X_n$，特别地，如果 e_i^n 取分片线性函数时，则称 Π_n 为分片线性插值投影，显然这时 $\Pi_n \xrightarrow{p} I$，这里 I 表示恒等算子；对于分片线性插值投影我们有 $\|\Pi_n\| \leqslant 1$。

例2.4 设 X 及 $\{t_{in}\}$ 如同上例，此时对任一属于 $C[a, b]$ 的函数 $x(t)$ 采用 Lagrange 插值法可以构造一个 $n-1$ 次多项式，使得在节点 $t_{1n}, t_{2n}, \cdots, t_{nn}$ 上的值与 $x(t)$ 的函数值相等，又因为任意多项式的 Lagrange 插值多项式就是其本身，因此若取 X_n 为所有次数小于 n 的多项式的集合，则它是 n 维空间，而且为 $C[a, b]$ 的子空间，这就表明 Lagrange 插值算子 L_n: $X \to X_n$ 是

投影算子。由插值理论知 L_n 可表写为

$$L_n x(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t) x(t_{in}),$$

其中 $w_i(t)$ 为 $n-1$ 次多项式，它在节点 t_{in} 上为1，其余节点上为0。

对于 Lagrange 插值投影 L_n，可证[20]

$$\|L_n\|_\infty \geqslant b \ln n,$$

其中 b 是正常数，因而至少存在一个函数 $x(t)\in C[a,b]$ 使得 $L_n x \not\to x$，即 Lagrange 插值投影算子列并不点态收敛于单位算子。

值得提出，如果一个投影算子列在某一空间是无界的，但在另外的空间也可能有界。例如当取 $a=-1, b=1$ 而插值点 t_{in}，$i=1,2,\cdots,n$ 取 $[-1,1]$上的 Чебышев 点时，可以证明 [8]，对任一 $x\in C[-1,1]$

$$\int_{-1}^{+1} |(L_n x - x)(t)|^2 \rho(t) dt \to 0, \quad n\to\infty, \tag{2.9}$$

其中 $\rho(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，即 L_n 作为从 $C[-1,1]$到 $L^2_\rho(-1,1)$（带权 $\rho(t)$ 的平方可积函数类）的插值算子是点态收敛的，因而 L_n: $C[-1,1]\to L^2_\rho(-1,1)$是一致有界的。

例2.5 类似于例2.3，用 t_i，$i=1,2,\cdots,n$ 分割$[a,b]$，并记 $\Delta_i=[t_{i-1},t_i)$，$h=\max\limits_i(t_i-t_{i-1})$。记 $P_{r,\Delta}$ 为区间$[a,b]$上的分片多项式集合，它在每一个 Δ_i 上（$i=2,\cdots,n$）均为次数$\leqslant r$的多项式，在端点 b 上的值通过连续性定义。对于 $x\in C[a,b]$，在每一个Δ_i 上取结点 τ_i^j，$j=1,2,\cdots,r+1$ 定义分片 Lagrange 插值多项式 $L_{n,r}x$，显然 $L_{n,r}x\in P_{r,\Delta}$。又若假定

$$\frac{\max\limits_{i,j}(\tau_i^j-\tau_{i-1}^j)}{\min\limits_{i,j}(\tau_i^j-\tau_{i-1}^j)}\leqslant\sigma，\ \sigma \text{ 为常数，}$$

那末由 Lagrange 插值表示式可知，$L_{n,r}: C[a,b]\to P_{r,\Delta}$ 是线性有界的，而且 $L_{n,r}^2=L_{n,r}$，即它是一个投影算子，进一步还可以证明当 $x\in C[a,b]$，$h\to0$ 时 $L_nx\to x$。

前面已经指出 Hilbert 空间中任一正交投影具有最优二乘逼近性质，下一个例子指出任何最小二乘近似定义了一个正交投影。

例2.6 设 H 为 Hilbert 空间，对任意 $x\in H$，考虑用最小二乘近似来定义它的投影，即定义满足

$$\min_{y\in H_n}\|x-y\|=\|x-\widetilde{x}_n\|$$

的 $\widetilde{x}_n\in H_n$ 为 x 在 H_n 的投影，$H_n\subset H$ 为有限维空间，由于 H_n 为有限维，这种 $\widetilde{x}_n$ 是存在的，并且可以表写为

$$P_nx=\sum_{i=1}^n(x,\psi_i)\psi_i,\qquad x\in H,$$

其中$\{\psi_i\}$为 H_n 的一组正交基（这种正交基可通过正交化方法而获得）。为了证明它，记

$$F(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left\|x-\sum_{i=1}^n a_i\psi_i\right\|^2,\ a_i\text{ 为数。}$$

展开 $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$并令

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=0,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

便得到 $a_i=(x,\psi_i)$，即

$$\widetilde{x}_n=P_nx=\sum_{i=1}^n(x,\psi_i)\psi_i,$$

且有

$$\|x-P_nx\|\leqslant\|x-y\|,\qquad \forall y\in H_n, \tag{2.10}$$

当 $y=P_nx$ 时等号才成立．显然 $x\in H_n$ 时 $P_nx=x$，即 $P_n^2=P_n$，也即 P_n：$H\to H_n$ 是投影算子．通过简单的计算还可以证明 P_n 是自共轭的，并可得

$$(P_nx,\ y-P_ny)=0,\qquad \forall x,y\in H,$$

即 $x=P_nx+(I-P_n)x$，$x\in H$．从而 P_n 还是正交投影算子．

特例，记 $H=L^2(a,b)$，H_n 由次数$\leqslant r$ 的分片多项式集合 $P_{r,\Delta}$ 所组成，由最小二乘近似定义的投影算子 P_n：$L^2(a,b)\to P_{r,\Delta}$ 便是正交投影算子．现在证明 $P_nx\to x$，$\forall x\in L_2(a,b)$，当 $h\to 0$（h 的意义见例2.5），为此目的，假定 x 是连续函数，由例2.5，存在分片 Lagrange 插值 $L_{n,r}$ 使

$$\|x-L_{n,r}x\|_\infty\to 0,\qquad h\to 0.$$

又由(2.10)式知

$$\|x-P_nx\|_{L^2}^2\leqslant\|x-L_{n,r}x\|_{L^2}^2\leqslant(b-a)\|x-L_{n,r}x\|_\infty^2,$$

从而 $P_nx\to x$，$\forall x\in L^2(a,b)\cap C[a,b]$．又对任意 $x\in L^2(a,b)$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $z\in C[a,b]$，使

$\|x-z\|_{L^2}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，由三角不等式

$$\begin{aligned}\|x-P_nx\|&\leqslant\|x-z\|+\|z-P_nz\|+\|P_nz-P_nx\|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\|z-P_nz\|+\|P_n\|\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant\varepsilon+\|z-P_nz\|.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性推得

$$P_n x \to x, \ \forall x \in L^2(a, b), \ h \to 0.$$

例2.7 考虑 $H^m(\Omega)$空间中的有限单元插值投影[12]，假定 $\Omega \subset R^n$ 是多角形区域，并且存在一个 Ω 的分割$\{\Omega_e\}$使得 $\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{E} \overline{\Omega}_e$. $u \in H^m(\Omega)$的有限元插值函数$U(x)$通常由 $u(x)$以及它的导数在结点$x^i, i=1,2,\cdots,G$上的有限多个值$\{D^\alpha u(x^i)\}_{i=1}^{G}$所决定，$|\alpha| \leqslant q$. 假定这样的值总共有 Q 个，这样 $U(x)$ 便是由 Q 个参数所确定的函数，因而所有的 $u(x) \in H^m(\Omega)$形成的插值函数空间也应是 Q 维的，并记它为 $S_h(\Omega)$. 今取 $S_h(\Omega)$ 中 Q 个函数 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_Q(x)$ 使之属于 $H^m(\Omega)$，并且是线性无关的，因而任一插值函数可以写为

$$U(x) = \sum_{i=1}^{Q} a^i \varphi_i(x).$$

为了写出映 $H^m(\Omega)$到S_h上的投影算子，首先讨论一下$\{\varphi_i(x)\}$, $i=1, \cdots, Q$ 的属性. 一般说来，$\{\varphi_i(x)\}$ 并非正交，但是它们是双正交的. 因我们用

$$(u, v)_s = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant s} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} \, dx$$

表示 $H^s(\Omega)$, $s \leqslant m$ 中的内积时，由于 $\{\varphi_i\}$ 是 S_h 的基，我们可得一 Q 阶矩阵 $(G_{i,j}^{(s)})$:

$$G_{i,j}^{(s)} = (\varphi_i, \varphi_j)_s, \ i, \ j = 1, 2, \cdots, Q.$$

这个矩阵是对称正定的，记其逆为$(G_{(s)}^{i,j})$:

$$(G_{(s)}^{i,j}) = (G_{i,j}^{(s)})^{-1}, \ s \leqslant m,$$

于是

$$\sum_{j=1}^{Q} G_{(s)}^{i,j} G_{j,m}^{(s)} = \delta_m^i, \ i, \ m = 1, 2, \cdots, Q,$$

这里 δ_m^i 为 Kronecker 符号。记 $\varphi_{(s)}^{\,i}(x)=\sum_{j=1}^{Q}G_{(s)}^{ij}\varphi_j(x), i=1,$ $2,\cdots,Q$。由于 $\varphi_{(s)}^{\,i}(x)$ 是 $\{\varphi_j(x)\}$ 的线性组合，因而 $\varphi_{(s)}^{\,i}\in S_h$，而且也是线性无关的，此外还有

$$(\varphi_{(s)}^{\,i}, \varphi_j)_s=\delta_j^i,$$

从而求得

$$(U,\varphi_{(s)}^{\,i})_s=\sum_{j=1}^{Q}a^j(\varphi_j, \varphi_{(s)}^{\,i})_s=\sum_{j=1}^{Q}a^j\delta_j^i=a^i.$$

至此，我们可定义 $u\in H^m(\Omega)$ 在 S_h 上的投影

$$P_n u=\sum_{i=1}^{Q}u_s^i\varphi_i(x),$$

其中 $u_s^i=(u, \varphi_{(s)}^{\,i})_s$。易证，这样定义的算子是有界的且有性质 $P_n^2=P_n$。事实上，若 $u\in S_h$，则它可以表为 $u=\sum_{i=1}^{Q}\hat{a}^i\varphi_i(x)$，$\hat{a}^i$ 为一些特定的系数，故

$$(\varphi_{(s)}^{\,j}, u)_s=\sum_i\hat{a}^i(\varphi_{(s)}^{\,j},\varphi_i)_s=\hat{a}^j,\ j=1,2,\cdots,Q,$$

从而

$$u=\sum_{i=1}^{Q}(\varphi_{(s)}^{\,i}, u)_s\varphi_i=P_n u,$$

也就是说 $P_n^2u=P_nu$。

现在证明 P_n 在 S 内积下是正交投影算子。

记

$$E^{(s)}(x)=u(x)-P_nu(x),$$

需要证

$$(E^{(s)}, v)_s=0, \forall v\in S_h(\Omega).$$

事实上

$$\begin{aligned}(E^{(s)}, v)_s&=(u-\sum_i u_s^i\varphi_i, \ \sum_j b^j\varphi_j)_s\\&=\sum_j b^j[(u, \varphi_j)_s-\sum_i u_s^iG_{(s)ij}]\end{aligned}$$

$$= \sum_j b^j [(u, \sum_k G^{(s)}_{j,k} \varphi_{(s)}^k)_s - \sum_k u_s^k G^{(s)}_{k,j}]$$

$$= \sum_j \sum_k b^j G^{(s)}_{j,k} (u_s^k - u_s^k) = 0.$$

这种插值投影还是 u 到 $S_h(\Omega)$ 关于 $H^s(\Omega)$ 范数的最优逼近，即

$$\|u - P_n u\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{v \in S_h} \|u - v\|_{H^s(\Omega)}.$$

事实上，对任一 $v \in S_h(\Omega)$ 有 $v = \sum_{i=1}^{Q} a^i \varphi_i(x)$，又

$$\|u - v\|^2_{H^s(\Omega)} = \|u\|^2_{H^s(\Omega)} - 2 \sum_{j=1}^{Q} a^j (u, \varphi_j)_s + \sum_{i=1}^{Q} \sum_{j=1}^{Q} a^i a^j (\varphi_i, \varphi_j)_s$$

是关于 a^i 的二次型，令

$$\frac{\partial \|u - v\|^2_{H^s(\Omega)}}{\partial a^k} = 0, k = 1, \cdots, Q,$$

得
$$\sum_{j=1}^{Q} a^j G^{(s)}_{i,j} - (u, \varphi_i)_s = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant Q,$$

并且对每一个 $1 \leqslant j \leqslant Q$

$$a^j = \sum_{i=1}^{Q} G^{i,j}_{(s)} (u, \varphi_i)_s = (u, \sum_{i=1}^{Q} G^{i,j}_{(s)} \varphi_i)_s$$

$$= (u, \varphi^j_{(s)})_s = u_s^j.$$

这点表明，$\forall v \in S_h$，使 $\|u - v\|_{H^s(\Omega)}$ 取极小的元恰好是 $P_n u$。

基于这些例子的思路，下一个例子将给出一个非常一般同时又经常采用的一种定义投影算子的方法。

例2.8 设 H 是 Hilbert 空间，$H_n \subset H$ 为其有限维子空间，如果对于任何一个元 $x \in H$，存在一个元 $x_n \in H_n$ 与之对应，使得 $(x_n, v) = (x, v)$，$\forall v \in H_n$ 成立，称这种对应关系定义

了一个投影算子 $P_n: H \to H_n$, $P_n x = x_n$, $x \in H$, $x_n \in H_n$。因此，也可以借助于式 $(x, v) = (P_n x, v)$, $x \in H$, $\forall v \in H_n$ 来定义投影算子。

显然，这种投影算子是正交的。

例2.9 设 $X = L^\infty[a, b]$，点 t_i, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 分 $[a, b]$ 成 n 个子区间。设 $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i)$ 并设 $e_i(t)$ 是 Δ_i 上的特征函数，即

$$e_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i \\ 0, & t \overline{\in} \Delta_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

记 X_n 为$[a, b]$上以 $e_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 为基函数的分片常数函数所组成的函数空间，对每一个 $x \in L^\infty(a, b)$ 定义

$$\Pi_n x = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{\Delta i} x(t) dt, \ t \in \Delta_i.$$

于是 Π_n: $X \to X_n$ 为投影算子，并称之为平均投影。当 $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$ 时，对任意 $x \in C[a, b]$ 有 $\Pi_n x \to x$。

例2.10 设 $X = L^2(\Omega)$, Ω 为平面上的有界区域，G_n 是 Ω 的可测子集，对每一个 $f \in L^2(\Omega)$，定义 P_n 为

$$P_n f = \begin{cases} f(t), & t \in G_n \\ 0 &, t \in \Omega - G_n, \end{cases}$$

显然 $P_n = P_n^2$，因而 P_n 是一个投影算子。

现在转向投影方程的建立。

设 X、Y 为 Banach 空间，考虑方程

$$Tu = f, \ u \in X, \ f \in Y, \tag{2.11}$$

其中 T 是线性（可以是无界）算子，并且 $D(T) \subset X$, $R(T) \subset$

Y_H，又设$\{X_n\}$、$\{Y_n\}$为有限维子空间序列，且

$$X_n \subset D(T) \subset X,\ Y_n \subset Y,\ n=1,2,\cdots.$$

$\{P_n\}$是一列投影算子，P_n: $Y \to Y_n$. 假若 $u_n \in X_n$ 是方程(2.11)的近似解，一般说来，$Tu_n - f \neq 0$，但是我们希望它在 Y_n 上的投影为零，即

$$P_n(Tu_n - f) = 0, \quad u_n \in X_n \tag{2.12}$$

或

$$P_n T u_n = P_n f, \quad u_n \in X_n.$$

按照这个观点，将原始方程（2.11）的求解问题转化为求方程(2.12)的解，这一方法称之为**投影解法**，而方程（2.12）可以看作是（2.11)的近似方程，并称之为(2.11)的**投影方程**，而投影方程之解称之为**投影解**.

当 $X = Y$ 且 $X_n = Y_n$ 时，则称上述投影方法为 **Галеркин 方法**，这时称投影方程(2.12)为**Галеркин 方程**，并称其解为**Галеркин 解**. 值得指出的是，对 Галеркин 方法，只要求 $X_n = Y_n$，并不一定要求 X_n 与 Y_n 取同一组基.

对于 Hilbert 空间，通常采用正交投影算子（如例2.8类型的投影）。今设 X、Y 均为 Hilbert 空间，且 $X_n \subset X$，$Y_n \subset Y$；

$$X_n = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n], \quad Y_n = [\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n].$$

令

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \tag{2.13}$$

此时投影方程(2.12)便等价于

$$(Tu_n - f, \psi_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

或写成

$$\sum_{k=1}^{n} (T\varphi_k, \psi_i)\alpha_k = (f, \psi_i),\ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.14}$$

并称它为 **Галеркин-Петров 方程**，这种解法称为 **Галеркин-Петров 方法**. 如果取 $\psi_i = S\varphi_i$，其中 S 为某一适当选取的线性算子，则称为**矩量法**；特别取 $S=T$ 时，即 $\psi_i = T\varphi_i$，则(2.14)式成为

$$\sum_{k=1}^{n}(T\varphi_k, T\varphi_i)a_k = (f, T\varphi_i),\ i=1,2,\cdots,n, \qquad (2.15)$$

此时称为**最小二乘法**，因为当采用式(2.13)表示 u_n 求 $\|Tu_n - f\|$ 的极小值时，也导得(2.15).

常用的一种情形是取 $S=I$，此时 $X_n = Y_n = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n]$，于是(2.15)式便化为

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(T\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i),\ i=1,2,\cdots,n, \qquad (2.16)$$

这时称为 **Бубнов-Галеркин 方法**.

如果利用(2.7)式来表示投影算子 P_n: $Y \to Y_n$，其中 $\dim Y_n = n$，那末投影方程(2.12)可以写成

$$\sum_{i=1}^{n} l_i(Tu_n)e_i = \sum_{i=1}^{n} l_i(f)e_i,$$

其中 e_i, $i=1,2,\cdots,n$ 为 Y_n 的基，或者等价的

$$l_i(Tu_n) = l_i(f),\ i=1,2,\cdots,n, \qquad (2.17)$$

其中 l_i 是 Y 上的线性有界泛函，它们由投影算子(2.7)唯一确定.

假定 T 是定义在欧氏空间中区域 Ω 上的函数类上的微分或积分算子，同过去一样，假定方程(2.11)的近似解为 $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$ 其中基函数 φ_i, $i=1,2,\cdots,n$ 也是在 Ω 上有定义的，如果必要，还假定在边界 $\partial\Omega$ 上满足边界条件. 我们令算

子方程在 Ω 中的点$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$上满足

$$(Tu_n)_{t=t_j}=(f)_{t=t_j}$$

或 $$\sum_{i=1}^{n} a_i(T\varphi_i)_{t=t_j}=(f)_{t=t_j} \quad j=1,2,\cdots,n. \tag{2.18}$$

这种方法称为**配置法**，显然如果取投影算子

$$P_n f=\sum_{j=1}^{n} f(t_j)e_j, e_j(t_i)=\delta_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots,n, f\in Y,$$

于是$\{e_j\}$便是 Y_n 上的基并且 $l_i(f)=f(t_i)$，比较(2.17)与(2.18)式则知配置法也是投影法的一种特例.

例2.11 考虑由积分算子 K

$$(Kx)(t)=\int_a^b k(t, s)x(s)ds, t\in[a,b] \tag{2.19}$$

所确定的算子方程

$$\lambda x=Kx+f, f\in X, x\in X, \lambda\neq 0, \tag{2.20}$$

X 经常取为 $C[a, b]$(配置法时)或 $L^2(a, b)$(Галеркин法时).

设 X_n 是 X 的有限维子空间，且 $\dim X_n=n$, $e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, \cdots, e_n^{(n)}$ 为 X_n 的基函数，P_n: $X\to X_n$ 为投影算子，如前所述，用投影方法来求方程(2.20)的近似解的基本步骤：令

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^{(n)}, \tag{2.21}$$

那末方程(2.20)的投影解便由下式

$$\lambda x_n=P_nKx_n+P_nf \tag{2.22}$$

所确定，对于 X、X_n，P_n 以及$\{e_i^{(n)}\}$的不同选择，(2.22)式将导致不同的线代数方程组. 它们的一般形式应为

$$(A_n - \lambda B_n)\xi_n = \eta_n, \tag{2.23}$$

其中 $A_n=(a_{ij})$, $B_n=(b_{ij})$均为 $n\times n$ 方阵，$\xi_n=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T$, $\eta_n=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$ 分别为 n 维未知向量与已知向量.

若设 $X=L^2(a, b)$, 并用$\{t_i\}$分区间(a, b)为 $n-1$等分，使 $a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$, 取 e_i（为方便书写，简记 $e_i=e_i^{(n)}$）为

$$e_i(t)=\begin{cases} 0, & a\leqslant t\leqslant t_{i-1}, \\ \dfrac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i, \\ \dfrac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}, \\ 0, & t_{i+1}\leqslant t\leqslant b, \\ i=2,3,\cdots,n-1, \end{cases} \tag{2.24}$$

$$e_1(t)=\begin{cases} 0, & t\geqslant t_2, \\ \dfrac{t_2-t}{t_2-t_1}, & t_1\leqslant t\leqslant t_2, \end{cases}$$

$$e_n(t)=\begin{cases} \dfrac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}, & t_n\geqslant t\geqslant t_{n-1}, \\ 0, & t\leqslant t_{n-1}, \end{cases}$$

于是函数 $e_i(t)$ 是 $[a,b]$ 上的分片线性函数，并且 $e_i(t_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 由于从图形上看每个 $e_i(t)$象似山顶（见图2.1），因此也称它为山形函数列.

显然，$e_i(t)\in L^2(a, b)$且$\{e_i(t)\}, i=1,2,\cdots,n$ 线性无关，我们可令 $X_n=[e_1, e_2, \cdots, e_n]$, 并设 $X=Y$ 及 $X_n=Y_n=[e_1, e_2, \cdots, e_n]$, 采用例 2.8 所确定的正交投影算子，则方程(2.22)便化为 Бубнов-Галеркин 方程

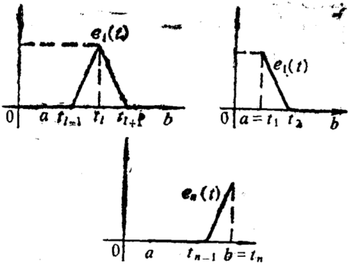


图 2.1

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}k(t,s)\,e_i(s)ds-\lambda e_i(t)\right)e_j(t)\,dt$$

$$=-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}f(t)e_j(t)dt,\qquad j=1,2,\cdots,n$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}e_j(t)\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}}k(t,s)e_i(s)dsdt$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}e_i(t)\,e_j(t)\ dt=-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}f(t)e_j(t)dt,\qquad(2.25)$$

从而得出(2.23)式中的 A_n, B_n, η_n 的元素分别为

$$a_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} e_j(t) \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} k(t, s) e_i(s) ds dt, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$b_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} e_i(t) e_j(t) dt, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\beta_j = -\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(t) e_j(t) dt, \qquad j = 1, 2 \cdots, n$$

（这里令 $t_0 = t_1 = a$, $t_n = t_{n+1} = b$)。将它们代入(2.23)式，解此线性方程组求得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，再由(2.21)式便得到(2.20)式的近似解 x_n。

假定 $X = Y = L^2(a, b)$，但 $X_n \subset X$, $Y_n \subset X$ 分别为基函数 $\{e_i(t)\}$ 及 $\{\theta_i(t)\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 生成的 n 维子空间（暂时不给出 e_i, θ_i 的具体形式），并设近似解为 $x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i(t)$。此时方程(2.22)将是 Галеркин-Петров 方程：

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_a^b \left(\int_a^b k(t, s) e_i(s) ds - \lambda e_i(t) \right) \overline{\theta_j(t)} \, dt$$

$$= -\int_a^b f(t) \overline{\theta_j(t)} \, dt, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \qquad (2.26)$$

从而

$$a_{ij} = \int_a^b \overline{\theta_j(t)} \int_a^b k(t, s) e_i(s) ds dt,$$

$$b_{ij} = \int_a^b e_i(t) \overline{\theta_j(t)} \, dt,$$

$$\beta_j = -\int_a^b f(t) \overline{\theta_j(t)} \, dt.$$

于是由(2.23)，(2.21)式可得近似解的另一种表达式。

又若在上述情形中取 $\theta_j(t)=(K-\lambda I)e_j(t)$，此时线性代数方程(2.23)应为

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left\{\lambda^2\int_a^b e_i(t)\overline{e_j(t)}\,dt-2\mathrm{Re}\left[\lambda\int_a^b\int_a^b k(t,s)e_i(s)\overline{e_j(t)}\,ds\,dt\right]\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_a^b\int_a^b k(t,s)\overline{k(t,v)}e_i(s)\,\overline{e_j(v)}\,dt\,ds\,dv\right\}$$

$$=\overline{\lambda}\int_a^b\int_a^b\overline{k(t,s)}\,f(t)\overline{e_j(s)}\,dt\,ds-\int_a^b f(t)\overline{e_j(t)}\,dt,$$

$$j=1,2,\cdots,n. \qquad (2.27)$$

从上式解出 α_i，$i=1,2,\cdots,n$，代入(2.21)式则得最小二乘解。

取 $X=C[a,b]$，如同在例2.3中所考虑过的那样，设 $X_n\subset X$ 为由 n 个山形函数$\{e_i(t)\}i=1,2,\cdots,n$（见(2.24)）所生成的有限维空间，并定义投影算子为

$$P_n x=\sum_{i=1}^{n}x(t_i)e_i, \qquad \forall x\in C[a,b],$$

其中 $a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$，此时(2.22)式将转化为

$$(\lambda x_n)(t)=\sum_{i=1}^{n}(Kx_n)(t_i)e_i(t)+\sum_{i=1}^{n}f(t_i)e_i(t).$$

将(2.19)及(2.21)式代入上式得

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}k(t_i,s)e_j(s)\,ds\right)e_i(t)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}f(t_i)e_i(t). \qquad (2.28)$$

因为 $e_1(t)$，$e_2(t)$，$\cdots$，$e_n(t)$ 线性无关，从而(2.28)可归纳为

(2.23)形式的线性方程组，其中 B_n 为单位矩阵而 A_n，η_n 分别为

$$a_{ij}=\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}k(t_i,s)e_j(s)ds,\ i,j=1,2,\cdots,n(t_0=a,t_{n+1}=b)$$

$$\beta_j=-f(t_j),\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

从(2.28)解出 α_i 代入(2.21)式即得 Галеркин 解。

值得指出的是，最后这一情况既是 Banach 空间 $C[a,b]$中的 Галеркин 方法的一个特例，同时也是一种特殊的配置法例子，因为这时(2.23)与配置方程(2.18)是一致的。

类似的作法对多维积分方程也合适。

例2.12 考虑变分问题

$$a(u,v)=f(v),\ \forall v\in V,\tag{2.29}$$

其中 V 为 Hilbert 空间，$a(u,v)$为 $V\times V$ 上的双线性泛函，且满足连续性条件：

$$|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\|v\|_V,\ \forall u,v\in V,\beta>0,\tag{2.30}$$

而 $f(v)$为 V 上的线性有界泛函。式(2.29)代表了相当广泛一类微分方程边值问题的弱解（或称广义解）问题（见§2.4）。方程(2.29)也可以写成相应的算子方程形式。事实上，因为对任一给定的 $u\in V$，$g(v)=a(u,v)$，$v\in V$是定义在空间V上的线性泛函。且因

$$|g(v)|=|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\|v\|_V,$$

所以它也是有界线性泛函，利用 Riesz 表现定理知必有 $Tu\in V$ 使

$$a(u, v) = (Tu, v)_V, \quad \forall v \in V. \tag{2.31}$$

容易验证，T 是映 $V \to V$ 的线性算子，又因

$$|(Tu, v)_V| = |a(u, v)| \leqslant \beta \|u\|_V \cdot \|v\|_V,$$

取 $v = Tu$，则 $\|Tu\|_V \leqslant \beta \|u\|_V$ 即 T：$V \to V$ 是有界线性算子.

同样，因为 $f(v)$ 是 V 上的线性有界泛函，再利用 Riesz 定理知存在 $Kf \in V$ 使

$$f(v) = (Kf, v)_V, \tag{2.32}$$

从而由(2.29)，(2.31)和(2.32)式推得

$$(Tu - Kf, v)_V = 0, \quad \forall v \in V,$$

即
$$Tu - Kf \perp V,$$

它表明(2.29)式等价于算子方程

$$Tu = Kf. \tag{2.33}$$

进一步我们建立(2.29)或与之等价的(2.33)式的投影方程。设 V_n 是 V 的一族有限维子空间，并规定由公式（见例2.8）

$$(v, w)_V = (P_n v, w)_V, \quad \forall w \in V_n, \; n \in N$$

定义正交投影算子 P_n：$V \to V_n$. 于是方程 $Tu = Kf$ 的投影方程是

$$P_n T u_n = P_n K f, \quad u_n \in V_n \tag{2.34}$$

或
$$(Tu_n, v_n)_V = (Kf, v_n)_V, \quad \forall v_n \in V_n.$$

根据式(2.31)，(2.32)，(2.34)又可写为

$$a(u_n, v_n) = f(v_n), \quad \forall v_n \in V_n. \tag{2.35}$$

设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是 V_n 的基，并令

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \tag{2.36}$$

那末投影方程(2.35)便可写为

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_i = f(\varphi_j), \quad j=1, 2, \cdots, n. \tag{2.37}$$

这便是变分方程(2.29)实用的 Галеркин 方程。求解(2.37)，然后将所得的 α_i，$i=1, 2, \cdots, n$ 代入(2.36)，即得方程(2.29)或与之等价的(2.33)的投影解。

在讨论投影解法中，空间序列的终归稠密概念经常会用到。设$\{X_n\}$是 Banach 空间 X 的子空间列，如果对任意 $z \in X$ 有

$$\rho(z, X_n) \longrightarrow 0, \quad 当\ n \longrightarrow \infty,$$

其中

$$\rho(z, X_n) = \inf_{z_n \in X_n} \|z - z_n\|,$$

则称**$\{X_n\}$终归稠密于 X**（或简称**终归稠于 X**）。不难证明，如果 $X_n \subset X$，$X_n \subset X_{n+1}$，那末$\{X_n\}$终归稠于 X 的充分必要条件是

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}.$$

同样可证，当 X 是 Hilbert 空间，而 $P_n: X \to X_n$ 是正交投影时，$\{X_n\}$终归稠于 X 的充要条件是

$$P_n x \longrightarrow x, \quad \forall x \in X, \quad 当\ n \longrightarrow \infty.$$

因为 $\forall z \in X$，$\rho(z, X_n) = \inf\limits_{z_n \in X_n} \|z - z_n\| = \|z - P_n z\|$.

在有限单元法教程中，下面事实是熟知的[9]：假定 $\Omega \subset R^n$ 是多角形区域，而且采用规则化方法三角剖分 Ω，如果采用分片线性 Lagrange 插值函数空间或最多只有 r 阶导数的分片

Hermite 插值多项式空间作为有限元插值空间 $S_h(\Omega)$，这时 $S_h(\Omega)$终归稠于空间 $H^1(\Omega)$。

一般说来，证明 Hilbert 空间中的正交投影算子 P_n 是点态收敛于单位算子 I，可以通过其插值空间（如果投影是插值投影的话）的终归稠密性而获得。另一方面，正如例2.6所见到的，直接证明 $P_n x\to x$ 有时是困难的。但是如果能证明在 X 的稠密子集上上述关系式 $P_n x\to x$ 成立，则利用$\|P_n\|=1$，$n\geqslant1$，仿照例2.6可以证明在整个空间 X 也成立。

2.2 线性算子的近似算子的逆

为了以后叙述方便，本节将给出两个关于线性算子的逆的命题。这些命题在讨论逆算子的存在性及近似解的误差分析时将会经常用到。

定理2.1 设 X 是 Banach 空间，$T\in L(X)$，$\|T\|<1$，则$(I-T)^{-1}$ 存在且为映 X 到 X 的有界线性算子，

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n \tag{2.38}$$

于 $L(X)$收敛，并且

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}. \tag{2.39}$$

证 令 $B_n=\sum\limits_{j=0}^{n}T^j$，它是(2.38)式右端的部份和。由于当 $p\geqslant1$ 时

$$\|B_n-B_{n+p}\|\leqslant\|T\|^{n+1}\sum_{j=0}^{p-1}\|T\|^j\leqslant\frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|},$$

于是$\{B_n\}$是 Banach 空间 $L(X)$中的 Cauchy 序列，且

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

于 $L(X)$存在。因

$$(I-T)B_n = B_n(I-T) = I - T^{n+1},$$

取极限后有

$$(I-T)B = B(I-T) = I,$$

因而 $B=(I-T)^{-1}$. 并因 $\|B_n\|\to\|B\|$ 及 $\|B_n\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}$ 便得式(2.39).

定理2.2 设 X、Y 均为 Banach 空间，$S, T\in L(X,Y)$ 且 $S^{-1}\in L(Y,X)$；

$$\Delta = \|S^{-1}\|\,\|S-T\| < 1, \tag{2.40}$$

则存在 $T^{-1}\in L(Y,X)$ 且

$$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{\|S^{-1}\|}{1-\|S^{-1}\|\,\|S-T\|}, \tag{2.41}$$

$$\|S^{-1}-T^{-1}\| \leqslant \|S^{-1}\|\,\|T-S\|\,\|T^{-1}\| \leqslant \frac{\Delta\|S^{-1}\|}{1-\Delta}. \tag{2.42}$$

证 因$T=S-(S-T)=S[I-S^{-1}(S-T)]$，而$S^{-1}(S-T)\in L(X)$，由(2.40)式及定理2.1，存在

$$[I-S^{-1}(S-T)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}[S^{-1}(S-T)]^j$$

且

$$\|[I-S^{-1}(S-T)]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|S^{-1}\|\,\|S-T\|}, \tag{3.43}$$

从而
$$T^{-1}=[I-S^{-1}(S-T)]^{-1}S^{-1}$$
存在。因此根据(2.43)得(2.41)式，利用等式
$$S^{-1}-T^{-1}=S^{-1}(T-S)T^{-1}$$
可立刻推出(2.42)式。

在应用上，常常考虑算子 $T=S+\Delta S$，其中 ΔS 为 S 的一个扰动算子，下面这个例子可作为定理2.2的一个简单应用。

例2.13 取 $X=C[0,1]$，考虑由积分方程

$$\lambda z(s)-\int_0^1 \sin(st)z(t)dt=y(s),\quad 0\leqslant s\leqslant 1 \tag{2.44}$$

定义的算子方程 $Tz=y$，其中 $y\in C[a,b]$，显然 $T: X\to X$，因积分算子的范数是

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |\sin(st)|dt=0.4597,$$

从而由定理2.1得知当 $|\lambda|>0.4597$ 时，$Tz=y$ 有唯一解。

另有一个由积分方程

$$\lambda x(s)-\int_0^1 stx(t)dt=y(s),\quad 0\leqslant s\leqslant 1 \tag{2.45}$$

所定义的算子方程 $Sx=y$，其中 $y\in X$ 且 $S: X\to X$，其中的积分算子的范数是0.5，由(2.45)式知

$$x(s)=\frac{1}{\lambda}y(s)+\frac{cs}{\lambda},\quad c \text{ 为常数。}$$

代回原方程中，求得 $Sx=y$ 的解

$$x(s)=S^{-1}y(s)=\frac{1}{\lambda}y(s)+\frac{1}{\lambda}\frac{3}{3\lambda-1}\int_0^1 sty(t)dt,\quad \lambda\neq\frac{1}{3},$$

从而得 $\|S^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left[1+\frac{3}{2|3\lambda-1|}\right].$

又因为

$$\|S-T\| = \max_{0<s<1}\int_0^1 |st-\sin(st)|dt$$

$$=\int_0^1 (t-\sin(t))dt = 0.403.$$

利用定理2.2得知当

$$0.403<\frac{2|\lambda(3\lambda-1)|}{3+2|3\lambda-1|},$$

即 $\lambda \leqslant -0.07334$ 或 $\lambda \geqslant 0.391$ 或 $0.1505<\lambda<0.2231$ 时，方程(2.44)唯一可解。

进一步的应用将在下节给出。

2.3 第二型算子方程的投影解法

本节要讨论算子方程

$$\lambda u = Ku+f, \ \lambda \neq 0 \tag{2.46}$$

的投影解的存在性与收敛性问题以及在积分和微分方程中的应用，其中 K 是 Banach 空间 X 上的线性有界算子，且$(\lambda-K)^{-1} \in L(X)$（为简单起见，今后记 $\lambda-K \equiv \lambda I-K$）。这种类型的方程称为**第二型Fredholm算子方程**，它的投影方程是

$$(\lambda-P_nK)u_n=P_nf, \ u_n\in X_n. \tag{2.47}$$

首先给出若干一般性命题。

定理2.3 设 X 是 Banach 空间，K: $X\to X$ 有界线性，假定$(\lambda-K)^{-1}$ 于 X 上存在且

$$\|K-P_nK\|<\frac{1}{\|(\lambda-K)^{-1}\|},\tag{2.48}$$

则在 X 上$(\lambda-P_nK)^{-1}$存在且

$$\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|\leqslant\frac{\|(\lambda-K)^{-1}\|}{1-\|(\lambda-K)^{-1}\|\|K-P_nK\|}.\tag{2.49}$$

此外(2.46)、(2.47)式的解 u 及 u_n 有如下估计

$$\|u-u_n\|\leqslant|\lambda|\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|\|u-P_nu\|.\tag{2.50}$$

证 利用定理2.2，设 $S=\lambda-K$，$T=\lambda-P_nK$，由(2.48)式直接推得(2.49)成立。现证(2.50)式，由于 $\lambda u-Ku=f$，故有

$$\lambda u-P_nKu=P_nf+\lambda(u-P_nu),$$

且因

$$\lambda u_n-P_nKu_n=P_nf,$$

两式相减后得

$$(\lambda-P_nK)(u-u_n)=\lambda(u-P_nu),$$

即

$$u-u_n=\lambda(\lambda-P_nK)^{-1}(u-P_nu),$$

故(2.50)式成立。

当交换 K 与 P_nK 的位置时，有完全类似的对偶结果：

设 X 是Banach空间，$K: X\to X$ 线性有界，若$(\lambda-P_nK)^{-1}$于 X 上存在且

$$\|K-P_nK\|<\frac{1}{\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|},$$

则$(\lambda-K)^{-1}$于 X 上存在且

$$\|(\lambda-K)^{-1}\|\leqslant\frac{\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|}{1-\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|\|K-P_nK\|},$$

$$\|u-u_n\|\leqslant|\lambda|\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|\|u-P_nu\|.$$

在定理2.3的假定条件下，只保证了原算子方程及近似方程

解的存在性及误差估计，但不保证 u_n 收敛于 u，但是如果假定 $P_n \xrightarrow{p} I$ 且 $(\lambda - P_nK)^{-1}$ 一致有界，则可以保证它的收敛性。

如果投影算子 P_n 的点态收敛性不能保证，但方程(2.46)中右端的 f 具有性质 $P_nf \to f$，收敛性结论仍然成立，并有下述定理

定理2.4 设 X 是 Banach 空间，K：$X \to X$ 线性有界，$(\lambda - K)^{-1}$ 于 X 上存在且有界，又如果当 $n \to \infty$ 时，$\|P_nK - K\| \to 0$，则当 n 充分大以后方程(2.47)

$$\lambda u_n = P_nKu_n + P_nf$$

有唯一解 u_n，且方程(2.46)也有唯一解 u_0，u_n 与 u_0 之间有估计式

$$\|u_n - u_0\| \leqslant c\|P_nu_0 - u_0\|. \tag{2.51}$$

如果 $P_nf \to f (n \to \infty)$，则有 $u_n \to u_0 (n \to \infty)$，并有

$$\|u_n - u_0\| \leqslant c_1\|P_n\|\rho(u_0, X_n), \tag{2.52}$$

其中 c、c_1 为常数而

$$\rho(z, X_n) = \inf_{z_n \in X_n} \|z - z_n\|.$$

证 定理的前半部关于解的存在性及估计式(2.51)直接由定理2.3推得。现在讨论收敛性，设 u_0 为(2.46)式的解，即 $\lambda u_0 = Ku_0 + f$，记 $P^{(n)} = P_n - I$，故有

$$\lambda P^{(n)}u_0 = P^{(n)}Ku_0 + P^{(n)}f.$$

根据假定

$$\|P^{(n)}Ku_0\| \leqslant \|P^{(n)}K\|\|u_0\| \to 0, \quad n \to \infty$$

推得当 $P^{(n)}f \to 0$ 时，$P^{(n)}u_0 \to 0$，$n \to \infty$。

最后，证估计式(2.52)，因为对任意 $z_n \in X_n$，$P^{(n)}z_n = 0$；因此，对任意 $z \in X$

$$\|P^{(n)}z\| = \|P^{(n)}(z - z_n)\| \leqslant (1 + \|P_n\|)\|z - z_n\|,$$

从而得

$$\|P^{(n)}z\| \leqslant (1 + \|P_n\|)\rho(z, X_n) \leqslant 2\|P_n\|\rho(z, X_n),$$

于是结论成立。

从上面的讨论看到，如果算子列 $\{K_n = P_nK\}$ 一致地收敛于算子 K，那末由 $(I - K)$ 的可逆性可导出 $(I - K_n)$ 的可逆性。对于列紧算子 K，当假定 $P_n \xrightarrow{p} I$ 时，由定理1.3有 $\|K - K_n\| \to 0$，$n \to \infty$。事实上，若记 U 为 X 上单位球，因为

$$\|K - P_nK\| = \sup_{x \in U} \|(P_n - I)Kx\|$$

$$= \sup_{y \in KU} \|(P_n - I)y\|,$$

则知上述论断成立，因而(2.48)式自然满足，故有

定理2.5 设 X 是 Banach 空间，$K: X \to X$ 线性有界且列紧，$(\lambda - K)^{-1} \in L(X)$，又设 $P_n \xrightarrow{p} I$，则当 n 充分大时在 X 上 $(\lambda - P_nK)^{-1}$ 存在且一致有界，并有估计式(2.49)，(2.51)及(2.52)。

这个定理既保证了近似解的存在性，也保证了收敛性及相应的误差估计。

作为上述一般理论的应用，我们仍然回头来讨论例2.11所给出的积分方程问题。在那里，我们已经给出了相应的投影方程，正如本节所见到的；分析其投影解是否存在，收敛以及误差估计需要验证投影算子 P_n 是否点态收敛于 I（即是否成立 $P_nx \to x$，$\forall x \in X$，$n \to \infty$），并对 $\|P_nx - x\|$ 和 $\|K - P_nK\|$ 作出估计。

为了更清晰地说明这点，考虑在应用上一个特别重要的情况，即如果所选取的投影算子 P_n 满足条件 $P_n \xrightarrow{p} I$，那末当

式(2.19)中的积分算子 K 在所考虑的空间 $C[a, b]$ 或 $L^2(a, b)$ 上是列紧的，而且

$$\lambda x(s) - \int_a^b k(s, t)x(t)dt = 0$$

只有零解时，这时由定理2.5推得积分方程(2.20)及其投影方程(2.22)当 n 充分大时都存在唯一解，而且投影解收敛于原问题的解，并有相应的误差估计.

显然，当 X 是具有可数基的 Banach 空间时，由(2.6)式所定义的 P_n 自然具有性质 $P_n \xrightarrow{p} I$. 对于一般的由函数所组成的 Banach 空间，由于投影的定义以及收敛的方式不同，投影算子列的点态收敛性并不经常易于论证，但是对于连续函数空间 $X = C[a, b]$，如果投影算子采用分片多项式插值投影，此时一般可以证明 $P_n \xrightarrow{p} I$，而且

$$\|x - P_n x\| \leqslant c\|x - y\|, \quad x \in X, \ \forall y \in X_n, \tag{2.53}$$

其中 c 为常数. 因此估计 $\|x - P_n x\|$ 将转化为插值误差估计.

如果空间 X 不是连续函数空间，投影算子列的点态收敛性有时也可以作类似的考虑.

作为一个特例，设 $X = L^2(a, b)$，X_n 是定义在网格 $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ 上的分片线性函数空间. 用 L_n 表示任一连续函数 $x(s)$ 在上述网格点上的分片线性插值算子，即

$$L_n x(s) = \frac{1}{t_j - t_{j-1}}[(t_j - s)x(t_{j-1}) + (s - t_{j-1})x(t_j)],$$

$$t_{j-1} \leqslant s \leqslant t_j, \quad j = 2, 3, \cdots, n.$$

显然

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)-L_nx(t)|\to 0\quad(\max_j|t_j-t_{j-1}|\to 0).$$

如果在 $L^2(a,b)$ 中采用最小二乘投影，那末对任意 $x\in C[a,b]$ 有

$$\|x-P_nx\|_2^2\leqslant\|x-L_nx\|_2^2\leqslant(b-a)\|x-L_nx\|_\infty^2,$$

从而推得，对任一连续函数 $x(s)$，在 L^2 范数下，$P_nx\to x$，$n\to\infty$。剩下的部分与例2.6完全一样可以证明 $P_nx\to x$，$\forall x\in L^2(a,b)$。进一步还可以对 $\|P_nx-x\|$ 作出估计。

现在讨论 $\|K-P_nK\|$ 的估计。

首先假定 $X=C[a,b]$，而且(2.19)式中积分算子的核 $k(t,s)$ 在 $0\leqslant t$，$s\leqslant 1$ 上是连续的，并且投影算子 $P_n\xrightarrow{p}I$，记

$$\Phi x=\int_a^b x(t)dt,\ x\in C[a,b].\tag{2.54}$$

对应的数值积分公式用

$$\Phi_nx=\sum_{j=1}^{n}w_{nj}x(t_{nj}),\quad 0\leqslant t_{nj}\leqslant 1\tag{2.55}$$

表示，设数值积分公式是收敛的，即 $\Phi_n\xrightarrow{p}\Phi$，又若记 k_t、$k^s\in C[a,b]$ 为

$$k_t(s)=k(t,s)=k^s(t),\ a\leqslant t,\ s\leqslant b,\tag{2.56}$$

则

$$(Kx)(t)=\Phi(k_tx),$$

$$(K_nx)(t)=\Phi_n(k_tx),\tag{2.57}$$

其中 Kx 由(2.19)式所定义，而 K_nx 为

$$(K_nx)(t)=\sum_{j=1}^{n}w_{nj}k(t,s_{nj})x(s_{nj}).\tag{2.58}$$

记

$$k^m(t, s) = (P_m k^s)(t), \tag{2.59}$$

即 $k^m(t, s)$ 是 $k(t, s)$ 以 s 作为参量（记作 $k^s(t)$）时的投影。在作了这些说明和假设后，我们证明

$$(P_m K x)(t) = \int_a^b k^m(t, s) x(s) ds; \tag{2.60}$$

而且 $k^m(s, t)$ 于 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上也连续。

为了证明(2.60)式，在(2.59)式中固定 m，则有

$$|k^m(t, s) - k^m(t', s')| \leqslant |(P_m k^s)(t) - (P_m k^s)(t')|$$
$$+ \|P_m\| \| k^s - k^{s'} \|.$$

因为 $k(t, s)$ 一致连续于 $a \leqslant t, s \leqslant b$，所以 $\{k_t: a \leqslant t \leqslant b\}$，$\{k^s: a \leqslant s \leqslant b\}$ 都是有界且等同连续的集合，因此上述集合以及 $\{P_m k^s: a \leqslant s \leqslant b\} = P_m\{k^s: a \leqslant s \leqslant b\}$ 都是相对紧集，从而得知 k^m 在 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上也是连续的。

因为 $\Phi_n \xrightarrow{p} \Phi$，从而对每个 $x \in C[a, b]$，它在相对紧集 $\{k_t x: a \leqslant t \leqslant b\}$ 上是一致收敛的，于是 $\Phi_n(k_t x) \to \Phi(k_t x)$ 关于 s 一致地成立($n \to \infty$)或

$$K_n x \to K x, \quad \forall x \in C[a, b], \tag{2.61}$$

因此有

$$P_m K_n x \to P_m K x, \quad m \text{ 固定}. \tag{2.62}$$

另一方面，

$$(P_m K_n x)(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{nj} k^m(t, s_{nj}) x(s_{nj})$$

$$= \Phi_n(k_t^m x) \to \Phi(k_t^m x) = \int_a^b k^m(t, s) x(s) ds,$$

这里 $k_t^m(s) = k^m(t, s)$，此即表明(2.60)式成立。

有了表达式(2.60)后便有估计式

$$\|K-P_nK\|\leqslant(b-a)\max_{(t,s)}|k(t,s)-k^n(t,s)|. \quad (2.63)$$

假定 $X=L^2(a,b)$，与过去一样，用 L_n 表示分片线性插值算子；如果(2.19)式中算子 K 的核 $k(t,s)$ 是连续的，则用 $k_n(t,s)$ 表示函数 $k(t,s)$ 视 s 为参量关于 t 的分片线性插值运算，于是有

$$\|Kx-P_nKx\|^2\leqslant\|Kx-L_nKx\|^2$$

$$=\int_a^b\left|\int_a^b[k(t,s)-k_n(t,s)]x(s)ds\right|^2dt,$$

从而

$$\|K-P_nK\|\leqslant\left[\int_a^b\int_a^b|k(t,s)-k_n(t,s)|^2dsdt\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.64)$$

关于(2.63)与(2.64)式的进一步估计将涉及到插值余量的分析，这里就不再讨论了。

我们知道，求解积分方程的配置法实际上是具有内插投影的投影方法。数值计算中有两种主要的插值方法，一种是分片多项式插值，一种是整个区间 $[a,b]$ 上（不分片）的多项式插值。对第一种情形，前面已经提到 $P_n\xrightarrow{p}I$ 通常都成立，因此有一般的收敛性定理可供应用，而且易于估计 $\|P_nx-x\|$。对于第二种情形，由于不能保证 $P_n\xrightarrow{p}I$（见例2.4），因此前面所述的依赖投影算子点态收敛的收敛性定理已经不适用，这时近似解的收敛性很大程度依赖于配置点 $\{t_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 的选取。

下面我们给出一个定理，说明在选取合适的配置点以后，仍然可以建立相应的收敛性结果。为此目的，选取 $a=-1$，$b=1$ 并取 t_i 为 Чебышев 点：

$$t_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi,\quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

记 L_n 是插值投影，它映每一个 $x(t)\in C[-1,1]$ 的函数为以 Чебышев 点为插值点的 $n-1$ 次插值多项式。如前面已经见过的，记 $X = L_\rho^2[-1,1]$ 表示具有权为 $\rho(t)$ 的平方可积函数集合，其范数为

$$\|x\|_{L_\rho^2}^2 = \int_{-1}^{+1} \rho(s)|x(s)|^2 ds,$$

其中权函数 $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$，$t\in(-1,+1)$.

引理2.1 设 E_1、E_2 均为 Banach 空间，$E_1\subset E_2$，E_1 连续地嵌入 E_2，即存在常数 c，使 $\forall x\in E_1$，$\|x\|_{E_2}\leqslant c\|x\|_{E_1}$；$T$ 是映 E_2 于 E_1 的列紧算子，线性算子 P_n 映 E_1 到 E_2 是有界的，$n\in N$；P_n 点态收敛于 P，即 $P_n x\to Px$，$\forall x\in E_1$，$n\to\infty$，其中 P 是由 E_1 到 E_2 的嵌入算子，则

$$\|P_n T - PT\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

类似于定理2.4后面所叙述过的，引理2.1的证明可利用定理1.3而得到。

定理2.6 设 K 是 $L_\rho^2(-1,+1)\to C[-1,1]$ 的列紧算子，则

$$\|L_n K - K\|_{L_\rho^2}\to 0. \tag{2.65}$$

又若视 K 为映 $L_\rho^2\to L_\rho^2$ 的算子，且设 $\lambda x = Kx$ 只有零解时，则当 n 充分大以后方程(2.20)的配置解 x_n 存在。记 x_0 为(2.20)式的解，x_n 为其配置解，则有如下误差估计

$$\|x_0 - x_n\|_{L_\rho^2}\leqslant c\|x_0 - z_n\|_\infty,\quad x_0\in C[-1,1],\ \forall z_n\in \Pi_{n-1},$$

其中c 为常数，$\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[-1,1]}|x(t)|$，$x\in C[-1,1]$ 而 Π_{n-1}

表示$[-1,1]$上次数不超过$n-1$的多项式集合。

证 因为$C[-1,1]\subset L_\rho^2(-1,1)$，而且$\|x\|_{L_\rho^2}\leqslant c\|x\|_\infty$，$\forall x\in C[-1,1]$。故在引理2.1中取$E_1=C[-1,1]$，$E_2=L_\rho^2(-1,1)$，又取$I$是$C[-1,1]\to L_\rho^2(-1,1)$的嵌入，由例2.4知

$$\int_{-1}^{+1}|(L_nx-x)(t)|^2\rho(t)dt\longrightarrow 0,$$

即对任一个$x\in C[-1,1]$，在$L_\rho^2(-1,1)$范数意义下L_n强收敛于I。根据假设K：$L_\rho^2(-1,1)\longrightarrow C[-1,1]$是列紧的，因此由引理2.1知

$$\|(L_n-I)K\|_{L_\rho^2}\to 0.$$

取$z_n\in \Pi_{n-1}$，$x\in C[-1,1]$，则

$$\|x-L_nx\|_{L_\rho^2}=\|(x-z_n)-L_n(x-z_n)\|_{L_\rho^2}$$

$$\leqslant\|x-z_n\|_{L_\rho^2}+\|L_n(x-z_n)\|_{L_\rho^2}$$

$$\leqslant\left(\left[\int_{-1}^{+1}\rho(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}+\|L_n\|_{C\to L_\rho^2}\right)\|x-z_n\|_\infty$$

$$\leqslant c\|x-z_n\|_\infty,$$

其中用到了$\|L_n\|_{C\to L_\rho^2}$的有界性（见例2.4）。

另一方面，根据所设$(\lambda-K)^{-1}$存在且有界于$L_\rho^2(-1,1)$，所以由定理2.4推得本定理成立。

为了便于应用定理2.6，我们先给出一个判别积分算子是列紧的定理。

设积分算子K：

$$Kx(t)=\int_\Omega k(t,s)x(s)ds,$$

若记其核 $(k(t,s)=k_t(s)$，$s\in\Omega$，即将核表示成以 t 为参量，s 为自变量的函数，其中 Ω 为R^n中的有界区域，则有

定理2.7 设$1\leqslant p<+\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，当且仅当 $k_t(s)$ 满足条件：

(a) $\sup\limits_{t\in\Omega}\|k_t\|_p<+\infty$，

(b) $\lim\limits_{t'\to t}\|k_{t'}-k_t\|_p=0$，$\forall t',t\in\Omega$

时，上述积分算子 K 是一个映 $L^r(\Omega)$ 到 $C(\overline{\Omega})$ 的列紧算子，其中 $q\leqslant r\leqslant\infty$。

我们不打算给出本定理的证明，读者如有必要，可以参考I.G.Graham；I.H.Sloan于1979年在 J.Math.Anal.Appl.,68,580—594 发表的"关于某些积分算子的列紧性"一文。

由于 $C\subset L^\infty\subset L^r\subset L^1$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，所以上述算子 K 在条件(a)，(b)下同样也是一个映 L^r 于 L^r，L^r 于 L^∞ 以及 L^∞ 于 C 的列紧算子。

例2.14 考虑高阶常微分方程边值问题

$$Lu\equiv u^{(m)}(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_k(t)u^{(k)}(t)=f(t),\quad -1<t<1,\tag{2.66}$$

$$l_i(u)\equiv\sum_{k=0}^{m-1}[\alpha_{ik}u^{(k)}(-1)+\beta_{ik}u^{(k)}(1)]=0,$$
$$i=1,2,\cdots,m,\tag{2.67}$$

其中 $\sigma_k(t),f(t)\in C[-1,1]$，$k=0,1,\cdots,m-1$；$\alpha_{ik}$，$\beta_{ik}$ 均为实常数。

取 $X=\{u;\ u\in C^{m-1}[-1,1],u^{(m)}\in L_\rho^2(-1,1),l_i(u)=0,$ $i=1,2,\cdots,m\}$。我们采取将问题转化为积分方程形式来解决此问题。为此假定 $u^{(m)}(t)=0$ 在边界条件(2.67)下只有唯一解 $u\equiv0$。为求(2.66)，(2.67)式的解 $u(t)$，我们试图先求出它的 m

阶导数 $x(t)=u^{(m)}(t)$，然后由式

$$u(t)=\int_{-1}^{1}G(t,s)x(s)ds \tag{2.68}$$

便得到 $u(t)$，其中 $G(t,s)$ 是算子 $Au=u^{(m)}(t)$ 满足边界条件(2.67)的 Green 函数，而 $x(t)$ 又可以从方程

$$x=Tx+f \tag{2.69}$$

得到，其中

$$Tx=\int_{-1}^{1}k(t,s)x(s)ds,$$

$$k(t,s)=\sum_{j=0}^{m-1}\sigma_j(t)\frac{\partial^j G(t,s)}{\partial t^j}.$$

显然，(2.69)式等价于(2.66)、(2.67)式。

现在讨论近似解，拟用配置法，为此，取 X 的 n 维子空间的基函数 $\{\phi_j(t)\}$，$j=1,2,\cdots,n$ 是 $m+j-1$ 次多项式且满足边界条件(2.67)的函数集合。这样的多项式是存在的，其一般形式为

$$\phi_j(t)=\sum_{k=0}^{m-1}c_{jk}t^k+t^{m+j-1},\qquad j=1,2,\cdots,n, \tag{2.70}$$

于是近似解可以记为

$$u_n(t)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\phi_j(t). \tag{2.71}$$

问题(2.66)、(2.67)在 $[-1,1]$ 的结点 t_i，$i=1,2,\cdots,n$ 上的配置方程为

$$u_n^{(m)}(t_i)-\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_k(t_i)u_n^{(k)}(t_i)-f(t_i)=0 \tag{2.72}$$

或
$$\sum_{j=1}^{n}[\phi_j^{(m)}(t_i)-\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_k(t_i)\phi_j^{(k)}(t_i)]\xi_j=f(t_i),$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

由于式(2.66)、(2.67)与(2.69)等价，于是问题等价于求

$$x_n(t)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\phi_j^{(m)}(t)$$

使之满足(2.69)式的投影方程

$$x_n=P_nTx_n+P_nf,\tag{2.73}$$

其中 P_n 是投影算子，它映每一个连续函数为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 上的 $n-1$ 次插值多项式。为了说明这点，只要注意到，对任一个使 $z(t_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n$ 的连续函数 $z(t)$，必有 $P_nz=0$。因此，由式(2.72)推得

$$P_n(x_n-Tx_n-f)=0.$$

另一方面，因 $x_n=u_n^{(m)}$ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式，故 $P_nx_n=x_n$，从而由式(2.72)导得(2.73)。

假定 $a=-1,b=1$，且(2.66)、(2.67)式有唯一解 u_0，并设 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是$[-1,1]$上的 Чебышев 点，记 P_n 是以这些 t_i 为结点的 Lagrange 插值投影算子，因为 $k(t,s)$ 只在 $t=s$ 有第一类间断点，因此由定理2.7推得算子 T 映 $L^2(-1,1)$ 于 $C[-1,1]$ 是列紧的。同样地，T: $L_\rho^2(-1,1)\longrightarrow C[-1,1]$ 也是列紧的（因 $L_\rho^2(-1,1)\subset L^2(-1,1)$），又由定理2.6知

$$\|P_nT-T\|_{L_\rho^2}\to 0,\ n\to\infty.$$

由于式(2.66)、(2.67)假定只有唯一解，故 $x=Tx$ 只有零解，从而 $(I-T)$ 在 $L_\rho^2(-1,1)$ 上是连续可逆的，即式(2.69)有唯一的解 x_0。

利用定理2.6，得知当 n 充分大以后，方程(2.73)有唯一解 x_n，且对任意 $x_0\in C[-1,1]$ 有估计

$$\|x_0-x_n\|_{L_\rho^2}\leqslant c\|x_0-z_n\|_\infty,\quad\forall z_n\in\Pi_{n-1},$$

其中 Π_{n-1} 为次数 $\leqslant n-1$ 的多项式集合，c 为常数。由于 $u_n^{(m)} = x_n, u_0^{(m)} = x_0$，因此有

$$\|u_0^{(m)} - u_n^{(m)}\|_{L_\rho^2} \leqslant c\|u_0^{(m)} - z_n\|_\infty, \forall z_n \in \Pi_{n-1}. \tag{2.74}$$

通过积分求得

$$\|u_0^{(i)} - u_n^{(i)}\|_\infty \leqslant c\|u_0^{(m)} - z_n\|_\infty, \quad \forall z_n \in \Pi_{n-1}, \\ i = 0, 1, \cdots, (m-1). \tag{2.75}$$

归纳以上的分析，当 n 充分大时，问题(2.66)、(2.67)的配置方程(2.72)是可解的，其解 u_n 满足误差估计式(2.74)、(2.75)。又由于任一连续函数都可以用多项式逼近，因此解 u_n 在范数

$$\|u_n - u_0\| = \|u_n^{(m)} - u_0^{(m)}\|_{L_\rho^2} + \sum_{i=0}^{m-1}\|u_n^{(i)} - u_0^{(i)}\|_\infty$$

意义下收敛于 u_0。

在实际问题中经常碰到以一个正定算子为其主要部分的算子方程求解的问题，即

$$Au = Ku + f, \tag{2.76}$$

其中 A 为实 Hilbert 空间 H 中的线性子集 $D(A) \subset H$ 上的自共轭(即 $A = A^*$，这里 A^* 是 A 的伴随算子)且正定的算子，即

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2, u \in D(A), \tag{2.77}$$

其中 γ 为常数。设 K 也为 H 中的线性有界算子且 $D(A) \subset D(K)$，这时问题(2.76)也可以转化为第二型算子方程来讨论。

方程(2.76)的投影方程为

$$P_n(Au_n - Ku_n - f) = 0, u_n \in H_n, \tag{2.78}$$

其中 P_n 为 $H \to H_n$ 的正交投影算子，$H_n \subset D(A) \subset H$，$n \in N$（自然数集）。

下面在集合 $D(A)$ 上定义新的内积

$$[u, v] = (Au, v), \quad u, v \in D(A), \tag{2.79}$$

显然它满足内积的诸条件，于是 $D(A)$ 形成了新的内积空间，并记其范数 $|u| = (Au, u)^{\frac{1}{2}}$，如果用 H_A 表示 $D(A)$ 在范数$|\cdot|$下完备化后所形成的空间，并称它为能量空间，可以证明 $H_A \subset H$，H_A 是 Hilbert 空间，因为如果 $\{u_n\} \subset D(A)$是 H_A 中的 Cauchy 列，那末它也是 H 中的 Cauchy 列。因此，$\forall u \in H_A$ 有唯一的元 $u' \in H$ 与之对应。新旧范数有如下关系

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|, \ u \in H_A. \tag{2.80}$$

用 P_n^A 表示 $H_A \to H_n$ 的正交投影，由于 $P_n v = 0$ 等价于$(v, w_n) = 0$，$\forall w_n \in H_n$，又因为 A 正定，从而

$$(v, w_n) = (AA^{-1}v, w_n) = [A^{-1}v, w_n].$$

所以 $P_n v = 0$ 等价于 $P_n^A A^{-1} v = 0$，$\forall v \in R(A)$，因此 (2.78) 可以改写为

$$P_n^A(u_n - A^{-1}Ku_n - A^{-1}f) = 0, \ u_n \in H_n \tag{2.81}$$

或

$$u_n = P_n^A A^{-1} K u_n + P_n^A A^{-1} f, \ u_n \in H_n.$$

如果假定 $R(K) \subset R(A)$，$f \in R(A)$，那末当 $A^{-1}K$ 的值域的闭包属于 H_A 以及 $A^{-1}f \in H_A$ 时，方程(2.76) 的投影解即可以转化为求方程

$$u = A^{-1}Ku + A^{-1}f \tag{2.82}$$

在 H_A 的Бубнов—Галеркин 解了。

必须指出，方程(2.82) 的解一般并不等价于(2.76)的解，但是任一(2.76)的解必为(2.82)的解，反之(2.82)的解 u_0 只有当 $u_0 \in D(A)$时才是(2.76)的解，但一般 $u_0 \in H_A$，因之我们称 u_0

为(2.76)的广义解。

由定理2.5可以得出

定理2.8 假定算子$A^{-1}K$列紧于 H_A 中，而且 $u=A^{-1}Ku$ 于 H_A 中只有零解，$P_n^A \xrightarrow{p} I$，则当 n 充分大以后，方程(2.81)有唯一解 $u_n \in H_n$，且 u_n 在 H_A 中的范数下收敛于(2.82)的解 u_o，并有估计

$$|u_o-u_n|\leqslant c|u_o-P_n^A u_o|,$$

其中 c 为一常数.

最后我们指出，由关系式(2.80)，当 u_n 在 H_A 的范数下收敛于 u_o 时，在 H 范数下也收敛于 u_o。

设 H_n 为 H_A 的 n 维子空间，并以 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 为它的基. 记

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i, \tag{2.83}$$

则(2.76)的投影方程可以写成

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i([\varphi_i, \varphi_j]_A-(K\varphi_i, \varphi_j)_H)=(f, \varphi_j)_H$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i((A\varphi_i, \varphi_j)_H-(K\varphi_i, \varphi_j)_H)=(f, \varphi_j)_H,$$
$$j=1, 2, \cdots, n. \tag{2.84}$$

解(2.84)得 α_i，将 α_i 代入(2.83)即得近似解.

例2.15 考虑常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dt^2}+\alpha_1(t)\dfrac{du}{dt}+\alpha_2(t)u=f(t), \quad 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{2.85}$$

其中 $f(t)$、$\alpha_1(t)$、$\alpha_2(t)$均为连续函数，记

$$Au=-\frac{d^2u}{dt^2},\quad Ku=-\left(a_1(t)\frac{du}{dt}+a_2(t)u\right).$$

取 $H=L^2(0,1)$，$D(A)=\{u:\ u\in C^2[0,1],\ u(0)=u(1)=0\}$，$H_A$ 是由在端点 $x=0$，$x=1$ 为 0 而在 $[0,1]$ 上绝对连续 并且具有一阶导数平方可积的函数的总 体所组成的空间。显然 $D(A)\subset H_A\subset H$，不难看出，A 在 $D(A)$ 上是正定 、而且 对称．由于对任一函数 $\varphi(x)\in C[0,1]$，

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}=\varphi(x) \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

存在唯一解，因此算子 A 存在逆算子

$$(A^{-1}\varphi)(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds,\ \varphi(s)\in C[0,1],$$

其中 $k(t,s)=\begin{cases} -s(t-1),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ -t(s-1),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$ (2.86)

在 $D(A)$上定 义能量内积

$$(Au,v)=\int_0^1(-u''(t))(v(t))dt=\int_0^1 u'(t)v'(t)dt;$$

在 H_A 上取内积及范数分别为

$$[u,v]=\int_0^1 u'(t)v'(t)dt,$$

$$|u|_A^2=\int^1|u'(t)|^2dt.$$

我们视 A 为映 H_A 的子集 $D(A)$ 到 $L^2(0,1)=H$ 中的算子。因

$$(Au,u)\geqslant\frac{1}{2}|u|_A^2,\ u\in D(A) \tag{2.87}$$

及

$$|(Au, v)| \leqslant |u|_A \cdot |v|_A, \quad u, v \in D(A), \tag{2.88}$$

并由于 $D(A)$ 稠密于 H_A，故我们可以将 (Au, v) 保模扩张到整个 $H_A \times H_A$。同样 A 也可以扩充定义在整个 H_A 上。记 $v = Au$，$u = A^{-1}v$，则有

$$|A^{-1}v|_A^2 \leqslant 2\|A^{-1}v\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2}, \; v \in H_A. \tag{2.89}$$

显然式(2.89)对 $v \in R(A)$ 也适用。另一方面，$A^{-1}v(v \in R(A))$ 可以看作 H_A 的元，并且有

$$\int_0^1 (u(t))^2 dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dt,$$

从而

$$|A^{-1}v|_A \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}}\|v\|_{L^2}, \; v \in R(A). \tag{2.90}$$

由式(2.86)以及 $R(A) = C[0, 1]$ 稠于 $L^2(0, 1)$，所以可以通过保模扩张使 A^{-1} 的定义域不仅可以扩张到 H_A 而且可以扩张到整个 H，并且保持式(2.89)、(2.90)均成立，即

$$|A^{-1}v|_A \leqslant \sqrt{2}\,\|v\|_{L_2}, \; v \in H. \tag{2.91}$$

设 $\{v_n\} \subset H$ 是有界集，根据在空间 L^2 中判别一个集合是否列紧的定理（见例1.1）得知 $\{A^{-1}v_n\}$ 在H 中相对紧；利用式(2.89)，$\{A^{-1}v_n\}$ 在 H_A 中也相对紧，即 A^{-1}：$H \to H_A$ 列紧。

当 K 扩充定义到整个 H_A 后，那末 K：$H_A \to H$ 是线性有界的，从而 $A^{-1}K$：$H_A \to H_A$ 是列紧的。因此，如果式(2.85)在 H_A 中只有唯一解且子空间列 $\{H_n\}$ 终归稠于 H_A，则引用定理2.8可证由式(2.83)、(2.84)所决定的近似解收敛于(2.85)的解。

类似的方法也可以用作讨论微分方程

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

的近似解.

2.4 正规算子方程的投影解法

在上一节的定理2.5中，我们曾经讨论过形如 $\lambda x-Kx=f$ 的算子方程，其中 $K\in L(X)$ 是列紧的算子，正如例1.6指出的算子 $(\lambda-K)$ 是正规的. 但当时并没有从正规性来讨论这一问题，而着重强调了算子 K 的列紧性及其有关性质，作为第二型算子方程讨论了它的近似解的存在性及其收敛性. 本节，我们将讨论更一般的形如

$$Ax=f,\ x\in X,\ f\in Y$$

的第一型算子方程的投影解的存在性与收敛性，其中 X，Y 均为 Banach 空间而且 $A\in L(X,Y)$ 是正规算子. 作为应用，在这一节后半部我们还对一类可以化为正规算子方程的变分问题的 Галеркин 解给予专门讨论.

算子 $A\in L(X,Y)$ 称为 **Fredholm 算子**，如果 $R(A)$ 是闭的，而且 $\dim N(A)<+\infty$，$\operatorname{codim} R(A)<+\infty$（余维 codim 的定义见附录一）. **Fredholm 算子的指数**定义为

$$\operatorname{Ind} A=\dim N(A)-\operatorname{codim} R(A).$$

由于任何列紧算子 $K\in L(X)$，$R(I-K)$ 闭的且 $\dim N(I-K)=\operatorname{codim} R(I-K)<+\infty$，因此 $I-K$ 是 0 指数 Fredholm 算子. 又如果算子 A 可以表示为 $A=B+C$，其中 $B\in L(X,Y)$

具有有界逆 $B^{-1}\in L(Y,X)$，而 $C\in L(X,Y)$ 是列紧的，则不难证明 A 是正规的，而且 $B^{-1}A\in L(X)$ 和 $A\in L(X,Y)$ 都是 0 指数的 Fredholm 算子，基于这一论述，§2.3定理2.5所讨论的是一种特殊类型的 Fredholm 算子方程。

现在假设 X_n、Y_n 分别为 X、Y 的子空间（可以是无限维子空间）。如果 $T_n\in L(X,Y)$，我们用 $\tilde{T}_n$ 表示 T_n 在 X_n 上的限制。

定理2.9 设 A、$A_n\in L(X,Y)$，$A_n\xrightarrow{r}A$（离散地）。

1. 若 $A^{-1}\in L(Y,X)$ 且 $\tilde{A}_n$: $X_n\to Y_n$ 是 0 指数 Fredholm 算子，则 $\tilde{A}_n^{-1}$ 存在且一致有界于 Y_n，$(n\geqslant n_0)$

2. 若设 $\{X_n\}$、$\{Y_n\}$，$n\in N$ 分别终归稠于 X 及 Y，又设 $\tilde{A}_n^{-1}$ 存在且一致有界于 Y_n，$n\geqslant n_0$。则 $A^{-1}\in L(Y,X)$。此时若 x、x_n 分别满足下列方程

$$
\begin{aligned}
&Ax=f, \quad x\in X, f\in Y,\\
&A_n x_n=f_n,\ x_n\in X_n, f_n\in Y_n
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

且 $f_n\to f$，则 $x_n\to x$ 并且

$$
\|x_n-x\|\leqslant\|A^{-1}\|\|Ax_n-f\|. \tag{2.93}
$$

证 在 $A^{-1}\in L(Y,X)$ 的前提下，为证 $\tilde{A}_n^{-1}(n\geqslant n_0)$ 存在且一致有界，只需证

$$
\|\tilde{A}_n x_n\|\geqslant\gamma\|x_n\|,\ \forall x_n\in X_n \tag{2.94}
$$

成立，其中 $\gamma>0$ 为常数。如果 (2.94) 式不成立，则存在序列 $\{x_n\}$，$n\in N'\subset N$，$x_n\in X_n$ 使得

$$
\|x_n\|=1,\ A_n x_n=\tilde{A}_n x_n\to 0,\ n\in N'.
$$

故由式 (1.32)、(1.33) 得知 $\{x_n\}$ d-列紧。记 $x\in X$ 使 $x_n\to$

$x(n\in N''\subset N')$，从而 $\|x\|=\lim\limits_{n\in N''}\|x_n\|=1$。再利用(1.33)，从 $A_n\xrightarrow{c}A$ 可得 $A_nx_n\to Ax(n\in N'', x_n\in X_n)$，因而 $Ax=0$，$x\neq 0$，此与 $A^{-1}\in L(Y, X)$ 矛盾。又因 $\tilde{A}_n$ 为 0 指数 Fredholm 算子及 $N(\tilde{A}_n)=\{0\}$，故 $R(A_n)=Y_n$，从而 $\tilde{A}_n^{-1}\in L(Y_n, X_n)$ 且一致有界。

假设 $\tilde{A}_n^{-1}\in L(Y_n、X_n)(n\geqslant n_0)$ 且一致有界，因为 $\{X_n\}$ 稠于 X，故 $\forall x\in X$，存在 $x'_n\in X_n$，使 $x'_n\to x$。又因 $A_n\xrightarrow{r}A$（离散地），故

$$\|Ax\|\geqslant\varliminf_{n\in N}\|\tilde{A}_nx'_n\|\geqslant\gamma\|x\|,$$

即 A^{-1} 在 $R(A)$ 上存在。现证 $R(A)=Y$，$\forall y\in Y$ 有 $y_n\in Y_n$，$y_n\to y$，又根据 $\tilde{A}_n^{-1}\in L(Y_n, X_n)$ 的假定，故有 $x_n=\tilde{A}_n^{-1}y_n$，因此 $\{x_n\}$ 有界并且 $y_n=\tilde{A}_nx_n\to y$，由正规性的假定有 $x_n\to x$，$n\in N'\subset N$，从而 $A_nx_n\to Ax$，即 $Ax=y$，此即表明 $R(A)=Y$。

最后我们证明估计式(2.93)。

设 x、x_n 满足(2.92)式，并设 $x'_n\to x$，$x'_n\in X_n$，由于

$$x_n-x'_n=\tilde{A}_n^{-1}(A_nx_n-f+Ax-A_nx'_n)$$

及
$$f_n=A_nx_n\to Ax=f,\ A_nx'_n\to Ax\quad(n\in N),$$
得知不等式

$$\|x_n-x\|\leqslant\|\tilde{A}_n^{-1}\|(\|f_n-f\|+\|Ax-A_nx'_n\|)+\|x'_n-x\|$$

右端各项均收敛于 0，从而 $x_n\to x$。

由于 $x_n-A^{-1}f=A^{-1}(Ax_n-f)$，估计式(2.93)是明显的。

上述结果当 $X_n=X$，$Y_n=Y$ 时可以叙述为：

设 A_n、$A\in L(X, Y)$，$A_n\xrightarrow{r}A$，若 $A^{-1}\in L(Y, X)$ 且 A_n 为X 上的 0 指数 Fredholm 算子，则有 $A_n^{-1}\in L(Y, X)$且一致

有界 ($n\geqslant n_0$)；反之，若 $A_n^{-1}\in L(Y,X)$ 且一致有界，则 $A^{-1}\in L(Y,X)$。

在上述假定下，若 x_0、x_n 满足

$$Ax_0=f,\qquad A_nx_n=f_n$$

且 $f_n\to f$，则 $x_n\to x_0$ 并有估计式

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\|A^{-1}\|\|Ax_n-f\|.$$

假设 X_n、Y_n 均为有限维子空间，$\dim X_n=\dim Y_n$，而且 $\{X_n\}$ 终归稠密于 X；投影算子 P_n: $Y\to Y_n$ 满足 $P_n\xrightarrow{p}I$，记 $A_n=P_nA$，则上述定理可以改写为

定理2.10 设 $A\in L(X,Y)$，$\{P_nA\}$ 离散渐近正规，则

$$A^{-1}\in L(Y,X)\Longleftrightarrow(\widetilde{P_nA})^{-1}\in L(Y_n,X_n),$$ 并且一致有界 ($n\geqslant n_0$)。

若满足上述条件并设 x_n、x 满足方程

$$Ax=f,\ x\in X,\ f\in Y,\tag{2.95}$$

$$P_nAx_n=P_nf,\ x_n\in X_n,\tag{2.96}$$

则 $x_n\to x$ 且

$$\|x_n-x\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|Ax_n-f\|.\tag{2.97}$$

证 因为任何映 n 维 Banach 空间 E_1 到 n 维空间 E_2 的线性有界算子 T 是空间 E_1 上的 0 指数 Fredholm 算子。

在实用中经常遇到的一种情况是线性有界算子 A: $H\to H$ 是正定的，即满足

$$(Ax,x)\geqslant\alpha(x,x),\ \forall x\in H,$$

其中 H 为 Hilbert 空间，$\alpha>0$ 为常数。此时算子 A 具有有界

逆 $A^{-1}\in L(H)$. 若 P_n: $H\to H_n$ 为正交投影算子，由例1.17知 $P_nA\xrightarrow{r}A$（离散地），从而方程(2.95)、(2.96)均存在唯一解，而且 $x_n\to x$.

在定理2.9及定理2.10中，借助于余量给出了解与近似解的误差估计，估计式(2.93)，(2.97)的成立，强烈地依赖于 A^{-1} 的存在与有界。下面我们介绍一个一般性误差估计定理，它可以不涉及算子方程的解是否存在，只要近似解存在时便可对余量进行估计，同时还给出了一般非齐次算子方程的解与近似解之间的误差估计方法。

设 X、Y 为 Banach 空间，考虑算子方程

$$Tu=f, \tag{2.98}$$

其中 T: $D(T)\subset X\to Y$ 是线性有界算子，$R(T)\subset Y$，又设 X_n、Y_n 分别为 X、Y 的一列有限维子空间，

$$X_n\subset D(T)\subset X,\ Y_n\subset Y\quad (n\in N);$$

$\{P_n\}$ 是一列投影算子：

$$P_n:\ Y\to Y_n,$$

方程(2.98)的投影方程为

$$P_nTu_n=P_nf,\ u_n\in X_n. \tag{2.99}$$

记
$$\rho(u^*,X_n)=\inf\{\|u^*-v\|,\ v\in X_n\},$$
$$\rho(f,TX_n)=\inf\{\|f-g\|,\ g\in TX_n\}.$$

定理2.11 设 $D(T)\subset X$, $R(T)\subset Y$, T: $D(T)\to Y$ 是一一对应的，P_n 映 TX_n 于 Y_n 为双方单值，则方程(2.99)对任意 $f\in Y$ 存在唯一解 u_n，并且

$$\|Tu_n-f\|\leqslant(1+\|\Pi_n\|)\rho(f,TX_n), \tag{2.100}$$

其中 $\Pi_n=(P_n|_{TX_n})^{-1}P_n$: $Y\to TX_n$. 又若 u^* 为方程(2.98)的解，则

$$\|u^*-u_n\|\leqslant(1+\|Q_n\|)\rho(u^*, X_n), \tag{2.101}$$

其中 $Q_n=(P_nT|_{X_n})^{-1}P_nT$: $X\to X_n$.

证 记 $Tu_n=x_n$，于是式(2.99)化为

$$P_nx_n=P_nf,\ x_n\in TX_n.$$

记 $\tilde{P}_n$ 为 P_n 在子空间 TX_n 上的限制，由条件 P_n 映 TX_n 于 Y_n 是双方单值的知存在逆 $\tilde{P}_n^{-1}$: $Y_n\to TX_n$，因此有唯一的元 $x_n\in TX_n$: $x_n=\tilde{P}_n^{-1}P_nf$.

又 T: $D(T)\to Y$ 为一一对应的，即 $D(T)$ 与 $R(T)$ 之间是一一对应的。因 $X_n\subset D(T)$，故 $TX_n\subset R(T)$，且由于 X_n 为有限维空间，从而 T: $X_n\to TX_n$ 是一一对应的，于是对于任一个 $x_n\in TX_n\subset R(T)$ 必有唯一的 $u_n=T^{-1}x_n\in X_n$ 与之对应，即 $Tu_n=x_n$，又因 $x_n=\tilde{P}_n^{-1}P_nf\in TX_n$，故得

$$P_nx_n=\tilde{P}_nx_n=\tilde{P}_n\tilde{P}_n^{-1}P_nf=P_nf,$$

即 u_n 满足(2.99)式。

设 $f_n\in TX_n$，则有 $\tilde{P}_n^{-1}P_nf_n=f_n$,

$$\begin{aligned}Tu_n-f&=x_n-f=\tilde{P}_n^{-1}P_nf-f\\&=\tilde{P}_n^{-1}P_n(f-f_n)-(f-f_n),\end{aligned}$$

所以

$$\|Tu_n-f\|\leqslant(1+\|\Pi_n\|)\rho(f, TX_n).$$

因为式(2.99)对任意 $f\in Y$ 有唯一解，从而 $P_nT|_{X_n}$: $X_n\to Y_n$ 双方单值，因此存在逆算子。记 $\widetilde{P_nT}$ 为 P_nT 在 X_n 上的限制，则 $(\widetilde{P_nT})^{-1}$ 存在且有界地映 $Y_n\to X_n$，取 $v_n\in X_n$ 使

得

$$\|u^* - v_n\| = \rho(u^*, X_n),$$

从而

$$v_n = (\widetilde{P_nT})^{-1}P_nTv_n = Q_nv_n.$$

又因为 u^* 满足 $Tu^* = f$ 及 $P_nTu_n = P_nf$, $u_n = (\widetilde{P_nT})^{-1}P_nf$ $= (\widetilde{P_nT})^{-1}P_nTu^* = Q_nu^*$, 从而

$$\begin{aligned}\|u^* - u_n\| &\leqslant \|u^* - v_n\| + \|v_n - u_n\| \\ &\leqslant \rho(u^*, X_n) + \|Q_nv_n - Q_nu^*\| \\ &\leqslant (1 + \|Q_n\|)\rho(u^*, X_n).\end{aligned}$$

从式(2.100)及(2.101)看出，若算子 Π_n 一致有界且 TX_n 终归稠于 Y，则对任一 $f\in Y$，$Tu_n - f$ 收敛于零，同样若 Q_n 一致有界，X_n 终归稠于 X 时，则 u_n 收敛于 u^*。

推论 设 $X = Y$ 且 P_n: $X \to X_n$ 具有性质

$$P_nx \to x,\ n \to \infty,\ \forall x\in X,$$

方程(2.93)对任一个 $f\in X$ 都有唯一解，且当 n 充分大以后 $\|P_nTx\| \geqslant \alpha\|x\|$, $\forall x\in X_n$，其中 $\alpha>0$ 为常数，则(2.99)式的解 u_n 收敛于(2.98)式的解 u^* 且 $\|Tu_n - f\| \to 0$.

要证明这点是不难的，因为

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{z\in TX_n\\ \|z\|=1}} \|P_nz\| &= \inf_{\substack{u\in X_n\\ \|Tu\|=1}} \|P_nTu\| = \inf_{\substack{u\in X_n\\ \|Tu\|=1}} \frac{\|P_nTu\|}{\|Tu\|} \\ &\geqslant \inf_{\substack{u\in X_n\\ \|Tu\|=1}} \frac{\|P_nTu\|}{\|T\|\|u\|} \\ &\geqslant \inf_{\substack{u\in X_n\\ \|Tu\|=1}} \left(\frac{\alpha\|u\|}{\|T\|\|u\|}\right) = \frac{\alpha}{\|T\|} > \delta > 0.\end{aligned}$$

这表明 $\|P_n z\| \geqslant \delta \|z\|$，$z \in TX_n$，又因为 TX_n，X_n 均为有限维空间，从而 P_n: $TX_n \to X_n$ 双方单值对应，同样的道理可证 $\|\Pi_n\|$ 有界，$\|Q_n\|$ 有界，所以结论成立。

下面的例，可以看作是定理2.9及定理2.11的应用.

例2.16 考虑

$$\begin{cases} u''(t) - \sigma(t)u(t) = f(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.102}$$

的配置解，其中 $f(t)$、$\sigma(t) \in C[0,1]$，$\sigma(t) \geqslant 0$。

记 $X = \{u;\ u \in C^2[0,1], u(0) = u(1) = 0\}$；取 $Y = C[0,1]$. 显然 $A = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \sigma\right)$是映 $X \to Y$ 的线性有界算子。设 $\forall f \in C[0,1]$，问题(2.102)有唯一解，从而 $A \in L(X,Y)$，A^{-1} 存在且 $A^{-1} \in L(Y,X)$.

为了用配置法求近似解，首先取如下分割 Δ：$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$，使 $t_{i+1} - t_i = h = \frac{1}{n}$. 熟知上述分割下的三次 B 样条基为

$$B_i(t) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (t - t_{i-2})^3, & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3, & t \in [t_{i-1}, t_i], \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t) - 3(t_{i+1} - t)^3, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ (t_{i+2} - t)^3, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}], \\ 0, & \text{其他地方}, \end{cases} \tag{2.103}$$

$i = -1, 0, 1, \cdots, n, n+1$. 它们是属于 $C^2[0,1]$ 但并不全属于 X 中的元。为此取

$\tilde{B}_i(t) = B_i(t)$，$2 \leqslant i \leqslant n-2$，

$$\tilde{B}_0(t)=B_0(t)-4B_{-1}(t),\ \tilde{B}_1(t)=B_0(t)-4B_1(t),\qquad(2.104)$$

$$\tilde{B}_{n-1}(t)=B_n(t)-4B_{n-1}(t),\ \tilde{B}_n(t)=B_n(t)-4B_{n+1}(t).$$

可证函数 $\{\tilde{B}_i(t)\}$, $i=0, 1, 2, \cdots, n$ 在 X 中是线性无关的. 记 $X_n=[\tilde{B}_0, \cdots, \tilde{B}_n]$. 此时 $X_n\subset X$. 令配置解形为

$$u_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\alpha i\,\tilde{B}_i(t),$$

定义投影算子 P_n: $Y\to Y_n$, 它使任一个 $f\in C[0, 1]$ 对应于 Y_n 中的元素是以 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 为结点的分片线性插值多项式, 并且满足配置条件

$$(P_nf)_{t=t_i}=f(t_i),\ f\in C[0, 1],\qquad 0\leqslant t_i\leqslant 1.$$

特别, 我们可以取山形函数作为 Y_n 的基, 易见 $P_nf\to f$, $n\to\infty$, $\forall f\in C[0, 1]$, 因 $Au=u''(t)-\sigma(t)u(t)$, 这时式(2.102)的配置方程便是

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(A\tilde{B}_i)(t_j)=f(t_j),\qquad j=0, 1, \cdots, n.$$

当配置点也取分割 Δ 上同样的 $t=t_i$ 时, 配置方程中的系数矩阵便是

$$C_{ij}=\tilde{B}_j''(t_i)-\sigma(t_i)\,\tilde{B}_j(t_i),\quad i, j=0, 1, 2, \cdots, n.$$

由于 B_j, $-1\leqslant j\leqslant n+1$ 及其导数在结点上有如下关系

$B_j(t)$	t_{j-2}	t_{j-1}	t_j	t_{j+1}	t_{j+2}
$B_j(t)$	0	1	4	1	0
$B_j'(t)$	0	$3/h$	0	$-3/h$	0
$B_j''(t)$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

从而得到配置方程中左端矩阵 $C=(\tilde{c}_{ij})$ 为

$$
\begin{pmatrix}
-\frac{36}{h^2} & -\frac{36}{h^2} & & & & \\
\frac{6}{h^2}-\sigma(t_1) & \frac{54}{h^2}+15\sigma(t_1) & \frac{6}{h^2}-\sigma(t_1) & & \text{\Large 0} & \\
 & -\frac{24}{h^2}+4\sigma(t_2) & -\frac{12}{h^2}-4\sigma(t_2) & \frac{6}{h^2}-\sigma(t_2) & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & \text{\Large 0} & \frac{6}{h^2}-\sigma(t_{n-2}) & -\frac{12}{h^2}-4\sigma(t_{n-2}) & -\frac{24}{h^2}+4\sigma(t_{n-2}) & \\
 & & & \frac{6}{h^2}-\sigma(t_{n-1}) & \frac{54}{h^2}+15\sigma(t_{n-1}) & \frac{6}{h^2}-\sigma(t_{n-1}) \\
 & & & & -\frac{36}{h^2} & -\frac{36}{h^2}
\end{pmatrix}
$$

右端向量为 $f=[f(t_0), f(t_1), \cdots, f(t_n)]^T$.

应用定理2.9以证明配置方程存在唯一解的关键在于证明

$P_n A \xrightarrow{r} A$(离散地).

取 $u_n \in X_n$, $n \in N$ 并使 $\|u_n\|_X$ 有界, 假定 $P_n A u_n \to y \in Y$. 由$\{u_n\}$在空间 X 的有界性得知$\|u_n\|_\infty$, $\|u_n'\|_\infty$, $\|u''\|_\infty$ 均为有界. 从而$\{u_n\}$、$\{u_n'\}$在极大模范数下一致有界且等同连续. 于是存在子集 $N' \subset N$, 按极大模范数有

$$u_n \to u_0, \quad u_n' \to v_0, \qquad n \in N'. \tag{2.105}$$

因为 $u_n'' \in C[0,1]$ 且在每个区间$[t_i, t_{i+1}]$上为线性函数, 而 P_n 又是分片线性插值投影, 从而

$$P_n u_n''(t) = u_n''(t), \qquad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

由于 $P_n \xrightarrow{p} I$, $P_n A u_n \to y$ 及式(2.105), 得知在极大模意义下 $u_n'' \to w_0$, 又因为微分运算子是闭算子, 从而

$$v_0 = u_0', \quad w_0 = v_0',$$

于是存在$N'' \subset N$ 使得

$$u_n \to u_0, \quad n \in N'', \text{ 于空间 } X,$$

而且 $u_0(0) = u_0(1) = 0$. 这表明$\{P_n A\}$是离散地渐近正规. $P_n A \xrightarrow{c} A$ 由 A 的有界性容易得知. 因此应用定理2.9知当 n 足够大以后, 配置方程存在唯一解. 如果记 u^*、u_n 分别为原方程及配置方程的解, 则有如下误差估计

$$\|u_n - u^*\| \leqslant \|A^{-1}\| \|Au_n - f\|.$$

在这里, 我们并没有涉及$\{X_n\}$是否终归稠于 X, 因此尚不能直接应用定理2.9来断定其收敛性. 如果引用定理2.11中最后一段的证明方法, 可证

$$\|u_n - u^*\| \leqslant (1 + \|Q_n\|)\rho(u^*, X_n),$$

其中 $Q_n = (P_nA|_{X_n})^{-1}P_nA$: $X \to X_n$. 由$(\widetilde{P_nA})^{-1}$的一致有界性得证$\|Q_u\|$一致有界，即得误差估计式为

$$\|u_n - u^*\| \leqslant c\rho(u^*, X_n),$$

其中 c 为常数，$\rho(u^*, X_n) = \inf\limits_{x_n \in X_n} \|u^* - x_n\|$.

进一步的估计利用样条插值的误差分析，它将取决于 u^* 的光滑程度，在此我们不打算深入介绍。

在上述问题中，当取 $\sigma(t) = 1$，$f(t) = 1$ 时，即

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

并取 $h = 0.125$，$x_i = ih$，$0 \leqslant i \leqslant 8$. 求得配置解

$$u_5 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \widetilde{B}_i(t),$$

其中

$c_0 = -0.002626776915$，$c_5 = -0.01811610481$，

$c_1 = 0.002192749137$，$c_6 = -0.01463440391$，

$c_2 = -0.01463440391$，$c_7 = 0.002192749136$，

$c_3 = -0.01811610481$，$c_8 = -0.002626776914$.

$c_4 = -0.01927064285$，

其准确解为 $u(t) = \dfrac{e^t + e^{1-t}}{e+1} - 1$.

类似地，我们也可以考虑下述积分微分方程

$$\begin{cases} u''(t)+\int_0^1 k(t,s)u(s)ds=f(t) \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{2.106}$$

其中假定 $k(s, t)$ 在 $0\leqslant s, t\leqslant 1$ 上连续，$f\in C[0, 1]$. 取 $X=\{u\in C^2[0, 1], u(0)=u(1)=0\}$，$Y=C[0, 1]$. 因而积分算子

$$Ku=\int_0^1 k(t, s)u(s)ds$$

映 $X\to Y$ 是列紧的. 又假定式(2.106)的齐次问题只有零解，此时可以仿照上面对(2.102)式所讨论的程序而讨论其配置解.

现在转入讨论正规的微分算子方程的投影解. 在例2.12曾指出过（但当时未予推导），不少微分方程边值问题等价于相应的变分问题. 例如对于边值问题

$$-\Delta u=f(x, y), \quad (x, y)\in\Omega, \tag{2.107}$$

$$u|\Gamma_1=0, \tag{2.108}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\Big|_{\Gamma_2}=0, \quad \alpha\geqslant 0, \tag{2.109}$$

其中 Ω 为 R^2 中的有界区域，$\partial\Omega=\Gamma_1+\Gamma_2$ 为其充分光滑的边界. $\text{mes}\,\Gamma_1\neq 0$, $f\in C(\overline{\Omega})$.

用光滑函数 v 乘(2.107)式两端，然后在 Ω 上积分

$$\iint_\Omega(-\Delta u)v\,dxdy=\iint_\Omega fv\,dxdy,$$

根据 Green 公式并考虑所给边界条件，且令

$$a(u, v)=\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\int_{\Gamma_2}\alpha uv\,ds,$$

$$(f, v)=\iint_{\Omega} f v d x d y,$$

则上述边值问题便化为

$$a(u, v)=(f, v). \tag{2.110}$$

记 $H_E^1(\Omega)=\{u: u \in H^1(\Omega), \left.u\right|_{\Gamma_1}=0\}$，它是 $H^1(\Omega)$ 的子空间. 可以证明，如果 $u \in C^2(\Omega)$，则 u 满足方程(2.107)～(2.109)的充要条件是 $u \in H_E^1(\Omega)$ 并使 u 对一切 $v \in H_E^1(\Omega)$ 满足变分方程(2.110). 换言之，若 u 为变分方程(2.110)的解且 $u \in C^2(\Omega)$，则 u 也是古典解. 与边值问题不同，变分方程允许有不属于 $C^2(\Omega)$ 的解，这种解称之为边值问题的广义解（或称弱解）.

如果我们试图求方程(2.107)～(2.109)的广义解，则可以提出如下变分问题：求 $u \in H_E^1(\Omega)$，使之满足变分方程

$$a(u, v)=(f, v), \quad \forall v \in H_E^1(\Omega). \tag{2.111}$$

类似地还可以举出不少例子. 对这类问题可以建立如下抽象提法：

设 H 是 Hilbert 空间，V 是 H 的稠密子空间. 一般说来 V 按范数 $\|\cdot\|_H$ 并不完备，但可以于 V 中引入新的内积 $(\cdot, \cdot)_V$ 及范数 $\|\cdot\|_V$ 使 V 成为 Hilbert 空间. 又假定 V 往 H 的嵌入：$V \hookrightarrow H$ 连续，即存在常数 $\alpha>0$，使

$$\|u\|_H \leqslant \alpha\|u\|_V, \quad \forall u \in V. \tag{2.112}$$

假定 A 是线性算子，其定义域 $D(A)$ 是 V 的稠密线性子集，值域 $R(A) \subset H$. 对 $f \in H$，考虑算子方程

$$A u=f. \tag{2.113}$$

为了定义(2.113)的广义解，构造和 A 相关的双线性形式

$$a(u, v)=(A u, v)_H, \quad u, v \in D(A),$$

假定 $a(u, v)$ 是 $D(A) \times D(A)$ 上的有界双线性形式，即存在常数

β 使

$$|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\|v\|_V,\quad u,v\in D(A).$$

由于 $D(A)$于 V 稠密，故可以将 $a(u,v)$ 保模扩张到整个 $V\times V$（我们仍然用同样的 $a(u,v)$记之），使得上述不等式对一切 u, $v\in V$ 成立，即

$$|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\|v\|_V,\quad\forall u,v\in V.\tag{2.114}$$

如果 $u\in V$ 满足变分方程

$$a(u,v)=(f,v)_H,\quad\forall v\in V,\tag{2.115}$$

则称 u 为式(2.113)的广义解。由于 V 于 H 稠密，当广义解 $u\in D(A)$时，u 也满足算子方程(2.113)，称如此的 u 为古典解。

与例2.12一样，可以证明(2.115)等价于线性有界算子方程

$$Tu=Kf,\tag{2.116}$$

其中

$$a(u,v)=(Tu,v)_V,\quad\forall v\in V,\tag{2.117}$$

$$(f,v)_H=(Kf,v)_V,\quad\forall v\in V.\tag{2.118}$$

事实上，由于 $a(u,v)$满足(2.114)式，故有线性有界算子 T: $V\to V$ 满足(2.117)式，根据(2.112)又有

$$|(f,v)_H|\leqslant\|f\|_H\|v\|_H\leqslant\alpha\|f\|_H\|v\|_V,\quad\forall v\in V,$$

即$(f,v)_H$是 V上的有界线性泛函。故有$Kf\in V$，满足(2.118)。

对于由双线性形式 $a(u,v)$ 所确定的算子 T，如果除了假定条件(2.114)外，还假设满足

$$a(u,v)\geqslant\alpha\|u\|_V^2,\quad\forall u\in V,\quad\alpha>0,\tag{2.119}$$

则由式(2.117)定义的算子 T 是正规算子。事实上由式(2.117)及(2.119)推得

$$\|Tu\|_V\geqslant\alpha\|u\|_V,\quad\alpha>0,\quad\forall u\in V,$$

从而由例1.4知算子 T 是正规的. 进一步还可以证明 $R(T)=V$，由于 $R(T)$是 V 上的闭子空间，如果 $R(T)\neq V$，则必有元 $v_0\neq 0$ 属于 $R(T)$的正交补空间，即

$$(Tu, v_0)_V = a(u, v_0) = 0, \quad \forall u\in V.$$

取 $u=v_0$，上式与(2.119)式矛盾. 由此推得 T^{-1} 存在，$T^{-1}\in L(V)$，并有$\|T^{-1}\|\leqslant \frac{1}{\alpha}$. 从而算子方程(2.116)对任一 $f\in H$ 存在唯一解 $u^*=T^{-1}Kf$.

综合上面分析有如下定理

定理2.12 (Lax-Milgram 定理) 设双线性形式 $a(u, v)$满足式(2.114)及(2.119)，则变分问题(2.115)或与之等价的算子方程(2.116)对任一 $f\in H$ 存在唯一解 $u^*\in V$.

下一步要论述方程(2.115)、(2.116)的 Галеркин 解的存在性与收敛性. 为此，设 V_n 为 V 的有限维子空间，与例2.12所处理的方式一样，记 P_n: $V\to V_n$ 是正交投影算子，$n\in N$. 于是方程(2.115)或(2.116)的投影方程是

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n)_H, \quad \forall v_n\in V_n \tag{2.120}$$

或

$$P_nTu_n = P_nKf. \tag{2.121}$$

假定 $P_n\xrightarrow{p}I$，于是有

定理2.13 设双线性形式满足(2.114)及(2.119)，则当 n 充分大时，方程(2.115)、(2.116)的 Галеркин 解，即(2.120)，(2.121)的解存在，记 u 为(2.115)、(2.116)的解，u_n 为(2.120)、(2.121)的解，则有如下估计

$$\|u-u_n\|\leqslant\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\|P_nu-u\|. \tag{2.122}$$

证 只需对方程(2.116)及(2.121)讨论就够了. 根据所设，

由式(2.117)及例1.17知 $P_nT \xrightarrow{r} T$(离散地)。又因 $T^{-1}\in \mathcal{L}(V)$，从而利用定理2.10得知当 $n\geqslant n_0$ 时方程(2.121)可解，定理前半部得证。现在采用定理2.11的叙述方式得知

$$\|u-u_n\|\leqslant(1+\|Q_n\|)\rho(u,V_n),$$

其中

$$Q_n=(P_nT|_{V_n})^{-1}P_nT,$$

从而式(2.122)成立。

有必要说明，基于定理2.10及2.11所得到的定理2.13至少有两点是可以改进的，其一，Галеркин 解的存在性不必限制在 $n\geqslant n_0$ 的情形；其二，误差估计还可以精密化。第一点是不难办到的，只要注意到不等式(2.114)、(2.119)局限在有限维空间 V_n 也成立。因此，定理2.12对有限维空间 V_n 也成立，$n\in N$。所以，在定理2.13中，近似解的存在性不必附加条件 $n\geqslant n_0$。第二点，可以引入一种 a-投影概念，利用它，不仅有稍好的误差估计公式，而且使近似解有明显的几何解释。

算子 P_n^a: $V\to V_n$ 称为 **a-投影算子**，如果

$$a((I-P_n^a)u,v)=0,\quad \forall v\in V_n,\quad u\in V. \tag{2.123}$$

即投影算子 P_n^a 使得一切形为 $(I-P_n^a)u$ 的元 a-正交于 V_n。

不难证明 a-投影算子 P_n^a 与正交投影算子 P_n: $V\to V_n$ 有如下关系：

$$\|(I-P_n^a)x\|_V\leqslant\frac{\beta}{\alpha}\|(I-P_n)x\|_V,\quad \forall x\in V, \tag{2.124}$$

其中 α,β 为式(2.119)，(2.114)中的常数。事实上，

$$\begin{aligned}&a((I-P_n^a)x,(I-P_n^a)x)\\&\qquad=a((I-P_n^a)x,(I-P_n)x),\quad \forall x\in V,\end{aligned}$$

因此

$$\alpha\|(I-P_n^a)x\|_V^2\leqslant|a((I-P_n^a)x,(I-P_n)x)|$$
$$\leqslant\beta\|(I-P_n^a)x\|_V\|(I-P_n)x\|_V,$$

此即(2.124)式.

假设 u 为式(2.115)的解，u_n 为(2.120)的解，则

$$u_n=P_n^a u,\tag{2.125}$$

即近似解 u_n 为 u 的 a-投影.

事实上，由于算子 $A=T^{-1}K$: $H\to V$ 是线性有界的且

$$u=Af,$$
$$a(Af,v)=(f,v)_H,\quad\forall v\in V,\ f\in H.$$

又根据 P_n^a: $V\to V_n$ 的定义

$$a((I-P_n^a)Af,v_n)=0,\quad\forall f\in H,\ v_n\in V_n,$$

从而 $$a(P_n^a u,v_n)=a(Af,v_n)=(f,v_n)_H,$$

即 $P_n^a u$ 为式(2.120)的解，根据解的唯一性知 $u_n=P_n^a u$，因此利用(2.125)及(2.124)估计 $\|u_n-u\|_V$ 就显得直观而容易，因 $u-u_n=(I-P_n^a)u$，故

$$\|u-u_n\|_V=\|(I-P_n^a)u\|_V$$
$$\leqslant\frac{\beta}{\alpha}\|(I-P_n)u\|_V=\frac{\beta}{\alpha}\|P_n u-u\|_V.\tag{2.126}$$

特别，若 $P_n u\to u$，则 $u_n\to u$（在 V 的范数意义下）.

进一步利用 Nitsche 技巧，我们还可以得到在空间 H 上的下述形式的估计

$$\|u-u_n\|_H\leqslant\beta\|u-u_n\|_V\inf_{\varphi_n\in V_n}\|\varphi-\varphi_n\|_V,\tag{2.127}$$

其中 φ 为下述问题

$$a(v,\varphi)=\left(v,\ \frac{u-u_n}{\|u-u_n\|_H}\right)_H,\quad \forall v\in V \tag{2.128}$$

的解。

事实上，因

$$a(u-u_n,\varphi)=\|u-u_n\|_H$$

且 $a(u-u_n,\varphi_n)=a((I-P_n^a)u,\varphi_n)=0,\ \forall\varphi_n\in V_n,$

故 $a(u-u_n,\varphi-\varphi_n)=\|u-u_n\|_H,\ \forall\varphi_n\in V_n,$

从而

$$\|u-u_n\|_H\leqslant\beta\|u-u_n\|_V\|\varphi-\varphi_n\|_V,\quad\forall\varphi_n\in V_n,$$

$$\|u-u_n\|_H\leqslant\beta\|u-u_n\|_V\inf_{\varphi_n\in V_n}\|\varphi-\varphi_n\|_V,$$

这就是(2.127)式。

综合以上所述并注意到 $P_n\xrightarrow{p}I$ 与 $\{V_n\}$ 终归稠于 V 的一致性，有

定理2.14 设 H，V 为 Hilbert 空间，V 稠密于 H 且 V 到 H 的嵌入是连续的；线性微分算子 A: $D(A)\to H$，$\overline{D(A)}=V$；若微分方程 $Au=f$ 的变分方程

$$a(u,v)=(f,v)_H,\quad\forall v\in V$$

满足条件(2.114)，(2.119)，即

$$|a(u,v)|\leqslant\beta\|u\|_V\cdot\|v\|_V,\quad\forall u,v\in V,$$

$$a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|_V^2,\quad\forall u\in V,$$

α、$\beta>0$，则方程 $Au=f$ 对每一个 $f\in H$ 存在唯一的广义解。如果有限维子空间列 $\{V_n\}\subset V$ 终归稠于 V，则它的Галеркин解 u_n 也存在，而且收敛于 $Au=f$ 的广义解，并有估计式(2.126)、

(2.127).

例2.17 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dt^2}=1 \\ u(0)=0,\ \ u'(1)=0 \end{cases} \tag{2.129}$$

的广义解.

易知它相应的双线性形式为

$$a(u,v)=\int_0^1 \frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}dt, \tag{2.130}$$

因而问题(2.129)的变分方程为

$$\int_0^1 \frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}dt=\int_0^1 v dt. \tag{2.131}$$

为求(2.131)的 Галеркин 解，取

$$V=\{u:\ u\in W_2^1(0,1),\ u(0)=0\}$$

并用 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分区间[0, 1]为 $n-1$ 等分，使 $t_1=0$，$t_n=1$；记 $\Delta_k=[t_{k-1}, t_k]$，取 $\varphi_i(t)$ 为山形函数（见（2.24）式），显然 $\varphi_i(t_j)=\delta_{ij}$ 且 $\varphi_i(t)\in W_2^1(0,1)$，它是分段线性函数且在 $\Delta_i\cup\Delta_{i+1}$ 之外为零. 这样的函数列 $\{\varphi_i(t)\}$，$i=2, \cdots, n$ 显然是线性无关的.

记 V_n 为由 $\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$ 所生成的空间，设近似解为

$$u_n=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\varphi_i, \tag{2.132}$$

于是(2.131)的 Галеркин 方程是

$$\sum_{k=2}^{n}\alpha_k\int_0^1 \frac{d\varphi_k}{dt}\,\frac{d\varphi_i}{dt}dt=\int_0^1 \varphi_i(t)dt \qquad (i=2, \cdots, n)$$

或 $\sum_{k=2}^{n}\alpha_k\sum_{j=2}^{n}\int_{\Delta_j}\frac{d\varphi_k}{dt}\frac{d\varphi_i}{dt}dt=\sum_{j=2}^{n}\int_{\Delta_j}\varphi_i(t)dt.$

当 $2\leqslant i\leqslant n-1$ 时，由于 φ_i 只在 $\Delta_i\cup\Delta_{i+1}$ 上不为0，而 $\frac{d\varphi_i}{dt}$ 在 Δ_i 及 Δ_{i+1} 上分别为 $\frac{1}{h}$ 及 $-\frac{1}{h}$，故得第 i 个及第 n 个方程

$$-\alpha_{i-1}+2\alpha_i-\alpha_{i+1}=h^2,$$

$$-\alpha_{n-1}+\alpha_n=\frac{1}{2}h^2,\ \text{其中}\ h=\frac{1}{n-1}.$$

归纳起来，得到 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 应满足方程组：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \vdots\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\\ \alpha_n\end{pmatrix}=h^2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, h=\frac{1}{n-1}.$$

当 $n=10$时， $h=\frac{1}{9}$，算得

$\alpha_2=0.104938$， $\alpha_7=0.444444$

$\alpha_3=0.197530$， $\alpha_8=0.475308$

$\alpha_4=0.277777$， $\alpha_9=0.493827$

$\alpha_5=0.345679$， $\alpha_{10}=0.499999$

$\alpha_6=0.401234$，

将上述结果代入式(2.132)即得近似解 $u_{10}(t)$.

本题准确解为 $u=t\left(1-\frac{t}{2}\right)$.

顺便指出，如果我们不需要 $u_n(t)$ 的解的表达式，而只需要 $u_n(t)$ 在结点 t_i 的离散值，那末，由于 $\varphi_i(t_j)=\delta_{ij}$，故知 $u_n(t_i)=\alpha_i$，因此从 Галеркин 方程解出 α_i，便求出了 t_i 处的离散解.

在 Галеркин 方法中，采用这种分片插值多项式作为空间 V_n 的基函数，所得到的解 $u_n(t)$ 称为 **有限单元近似解**，并称这种解法为 **Галеркин 有限单元法**.

如果一个微分算子 A 可以分解为两个部分（例如二阶椭圆型微分方程，所有二次导数项作为一部分，低次导数项作为第二部分），其中主部是其定义域中的正定算子而另一部分是列紧算子，这时与微分方程边值问题所对应的变分问题跟前面已经讨论过的相比，其求解条件稍复杂些，下面讨论这种类型的问题.

仍设 H、V 为 Hilbert 空间；V 是 H 的稠密子空间；V 在 H 的嵌入是连续的，这种嵌入是列紧的，即 V 中任一有界集必为 H 中的相对紧集.

定理2.15 若变分方程

$$a(u,v)+b(u,v)=(f,v)_H,\quad \forall v\in V \tag{2.133}$$

中的 $a(u,v)$、$b(u,v)$ 均为双线性泛函，其中 $a(u,v)$ 满足连续性条件

$$|a(u,v)|\leqslant\alpha\|u\|_V\|v\|_V,\quad \forall u,v\in V \tag{2.134}$$

及强椭圆性条件

$$a(u,u)\geqslant\beta\|u\|_V^2,\quad \forall u\in V, \tag{2.135}$$

而 $b(u,v)$ 满足条件

$$|b(u,v)|\leqslant\delta\|u\|_V\|v\|_H,\quad \forall u,v\in V, \tag{2.136}$$

其中 α、β、δ 均为正常数.

假设$\{V_n\}(n\in N)$为V的n维子空间，$\{V_n\}$终归稠密于V；投影算子P_n: $V\to V_n$是正交的．如果(2.133)的齐次方程只有零解，则对任意$f\in H$，方程(2.133)有唯一解，而它的 Галеркин 方程

$$a(u_n, v_n)+b(u_n, v_n)=(f, v_n)_H, \quad \forall v_n\in V_n \tag{2.137}$$

当n充分大以后存在唯一解．记u、u_n分别为(2.133)和(2.137)的解，则$u_n\to u$且

$$\|u_n-u\|_V\leqslant c_1\|P_nu-u\|_V, \tag{2.138}$$

其中c_1为常数．

证 根据V嵌入H是连续的假设，由式(2.136)推得

$$|b(u, v)|\leqslant c\delta\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u, v\in V. \tag{2.139}$$

由条件(2.134)、(2.139)，利用 Riesz 表现定理，可定义有界线性算子T: $V\to V$，S: $V\to V$使

$$(Tu, v)=a(u, v), \qquad \forall v\in V, \tag{2.140}$$

$$(Su, v)=b(u, v), \qquad \forall v\in V.$$

同样地，因为$f\in H$，故可定义线性有界算子K: $H\to V$使

$$(Kf, v)_V=(f, v)_H, \qquad \forall v\in V, \tag{2.141}$$

从而方程(2.133)便等价于算子方程

$$Tu+Su=Kf. \tag{2.142}$$

由强椭圆性条件(2.135)知T^{-1}存在，同样可证$R(T)=V$，因此T^{-1}是映$V\to V$的有界线性算子，而且

$$\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\beta}. \tag{2.143}$$

现证算子S是列紧的．为此取$\{u_n\}$为V的有界集，由于V

嵌入 H 是列紧的，因此 $\{u_n\}$是 H 的相对紧集；又因 S 是有界算子，故$\{Su_n\}\subset V$ 也是有界集，从而它也是 H 的相对紧集，因而存在 $N'\subset N$，使得$\{Su_n\}$，$n\in N'$ 为 H 中的柯西列，又由(2.136)式推得

$$
\begin{aligned}
&|(Su_m-Su_l,\ Su_m-Su_l)_V|\\
&=|b(u_m-u_l,\ Su_m-Su_l)|\leqslant c\delta M\|Su_m-Su_l\|_H,
\end{aligned}
$$

其中 $m, l\in N'\subset N$，故

$$
\|Su_m-Su_l\|_V\to 0 \qquad \text{当 } m,\ l\to\infty,
$$

从而 S 映有界集为相对紧集。显然(2.142)中的 $T+S$ 是正规算子，现在将方程(2.142)改写为

$$
u+T^{-1}Su=T^{-1}Kf, \tag{2.144}
$$

其中 $T^{-1}S$: $V\to V$ 是列紧的。由于(2.133)的齐次方程只有零解，因此$(I+T^{-1}S)^{-1}$ 存在，即式(2.133)对任一 $f\in H$ 存在唯一解。

方程 $Tu+Su=Kf$ 的 Галеркин 方程为

$$
P_nTu_n+P_nSu_n=P_nKf, \qquad u_n\in V_n, \tag{2.145}
$$

此即(2.137)式。

由于 $\{P_nS\}$ 是族列紧的（见(2.159)式），故由例 1.17 及(1.36)，(1.37)得知$\{P_nT+P_nS\}$ 离散渐近正规，从而由定理 2.10得知(2.145)当 n 充分大以后可解*，而且近似解是收敛的，并有相应的误差估计式。为了获得(2.138)的估计式，将(2.145)改写成

$$
P_nT(I+T^{-1}S)P_nu_n=P_nKf. \tag{2.146}
$$

根据条件(2.135)，若将算子(P_nT)限制在 V_n 上时，$(P_nT)^{-1}$ 也

---

*) 根据开映射定理，如果 A 是映 Banach 空间 X 到 Y 的有界线性算子，$R(A)=Y$ 且映射是一一对应的，则 A^{-1} 存在且连续。

存在且按范数一致有界，即$(P_nTP_n)^{-1}$存在且一致有界。而

$$P_nT(I+T^{-1}S)P_n=P_nTP_n(I+T^{-1}S)$$
$$+P_nT(T^{-1}SP_n-P_nT^{-1}S).$$

上式右端第一项存在一致有界的逆算子$(I+T^{-1}S)^{-1}(P_nTP_n)^{-1}$，而第二项由于

$$\|(T^{-1}SP_n-T^{-1}S)+(T^{-1}S-P_nT^{-1}S)\|$$
$$\leqslant\|(P_n^*-I)(T^{-1}S)^*\|+\|(P_n-I)(T^{-1}S)\|$$

且因$(T^{-1}S)^*$也是列紧的及$P_n^*=P_n$推得一致收敛于零。因而当n充分大以后算子$P_n\mathrm{T}(I+T^{-1}S)P_n$在$V_n$上也存在逆而且一致有界。由此同样得知方程(2.146)存在唯一解u_n。

设u、u_n分别为(2.142)与(2.146)式的解，用P_n作用于(2.142)的两端并与(2.146)相减得

$$P_nT(I+T^{-1}S)u-P_nT(I+T^{-1}S)P_nu_n=0.$$

上述方程可化为

$$P_nT(I+T^{-1}S)P_n(u-u_n)$$
$$=P_nT(I+T^{-1}S)(P_nu-u),$$

得
$$u-u_n=(P_nT(I+T^{-1}S)P_n)^{-1}(P_nT(I+T^{-1}S)(P_nu-u)),$$

由此推得(2.138)式。

例2.18 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad +c(x)u=f(x),\quad x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{2.147}$$

的广义解，其中 Ω 为 R^n 中的有界区域，$(a_{ij}(x))$在$\overline{\Omega}$上连续且正定，又 $c(x)>k\geqslant 0$，$b_i(x)$均为$\overline{\Omega}$上的连续函数，$f(x)\in L^2(\Omega)$。

问题是寻找 $u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u, v)+b(u, v)=f(v), \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

成立，其中

$$a(u, v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}dx,$$

$$b(u, v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\right)v dx,$$

$$f(v)=\int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

选取 $V=H_0^1(\Omega)$，$H=L^2(\Omega)$，由$(a_{ij}(x))$是正定的，故条件(2.135)成立，又由 $a_{ij}(x)$、$c(x)$及 $b_i(x)$的假定，条件(2.134)，(2.136)均成立，再由嵌入定理知，$H_0^1(\Omega)$往 $L^2(\Omega)$ 的嵌入是列紧且连续的，因而可以应用定理 2.15 求 (2.147)的 Галеркин 解。

2.5 Ritz 方法及其几何解释

本节将假定算子 $A: D(A)\subset H\to H$，$\overline{D(A)}=H$ 且在 $D(A)$ 上是对称正定的前提下给出方程 $Au=f$的 Ritz 近似解法。还将看到这种方法也是一种投影解法，在本节，H 可以是复的 Hilbert 空间。

定理2.16 设 $A: D(A)\subset H\to H$ 对称正定，即 $\forall u, v\in D(A)$有$(Au, v)=(u, Av)$且存在常数 $m>0$使

$$(Au,\ u)\geqslant m(u,\ u),\quad \forall u\in D(A). \tag{2.148}$$

又设 $\overline{D(A)}=H$，则方程

$$Au=f,\quad f\in H \tag{2.149}$$

的解必然是泛函

$$F(u)=(Au,\ u)-(u,\ f)-(f,\ u) \tag{2.150}$$

的极小点. 反之，泛函 $F(u)$的极小点必然为式（2.149）的解.

证 $\forall s\in D(A)$,

$$\begin{aligned}F(\tilde{u}+s)-F(\tilde{u})=&(A(\tilde{u}+s),\ \tilde{u}+s)\\&-(\tilde{u}+s,\ f)-(f,\ \tilde{u}+s)-(A\tilde{u},\ \tilde{u})\\&+(\tilde{u},\ f)+(f,\tilde{u})\\=&(A\tilde{u}-f,\ s)+(s,\ A\tilde{u}-f)+(As,\ s)\\\geqslant&(A\tilde{u}-f,\ s)+(s,\ A\tilde{u}-f)+m(s,\ s).\end{aligned}$$

因此，若$\tilde{u}$是式（2.149）的解时，推得 $F(\tilde{u}+s)\geqslant F(\tilde{u})$，即$\tilde{u}$为式(2.150)的极小点.

反之，若$\tilde{u}\in D(A)$是(2.150)的极小点，则令 $s=\lambda\delta$，其中λ为实数，$\delta\in D(A)$，当λ充分小时，$\tilde{u}+\lambda\delta\in D(A)$，又因

$$\begin{aligned}F(\tilde{u}+\lambda\delta)-F(\tilde{u})=&2\lambda\,\mathrm{Re}(A\tilde{u}-f,\ \delta)\\&+\lambda^2(A\delta,\ \delta),\end{aligned}$$

从而根据假设条件

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(\widetilde{u}+\lambda\delta)-F(\widetilde{u})}{\lambda}=0$$

得 $$\operatorname{Re}(A\widetilde{u}-f,\ \delta)=0,\ \delta\in D(A).$$

类似地，取$i\lambda$代替λ可得虚部也一样的结果，同时由于$\overline{D(A)}=H$，故$A\widetilde{u}=f$.

上面定理说明求式(2.149)的解可化为求(2.150)的极小点，但未说明它们的解是否存在.

为了讨论解的存在性，如同§2.3，在集合$D(A)$上定义新的内积

$$[u,\ v]=(Au,\ v),\qquad u,v\in D(A),$$

相应的范数为$|u|=(Au,\ u)^{\frac{1}{2}}$，新旧范数的关系：

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{\gamma}|u|,\ u\in H_A,\ \gamma\text{为常数},\tag{2.151}$$

其中H_A为$D(A)$在范数$|\cdot|$下完备化所形成的空间，显然$H_A\subset H$，H_A又称为能量空间. 我们将证明，所述的问题在能量空间上解存在（称为广义解）.

定理2.17 如果A在$D(A)$上对称正定，那末当泛函(2.150)扩充定义到H_A上后必有解.

证 由于$(u,\ f)$可以视为H中的有界线性泛函，而且因

$$|(u,\ f)|\leqslant\|f\|\|u\|\leqslant\|f\|\ \frac{1}{\gamma}|u|,\ u\in H_A,$$

所以它也是H_A上的线性有界泛函. 因而根据 Riesz 表现定理，存在$f'\in H_A$使$(u,\ f)=[u,\ f']$. 于是可将式(2.150)中的泛函$F(u)$予以扩充定义，使得当$u\in D(A)$时，$F(u)$即为(2.150)式，而当$u\in H_A$时

$$F(u)=[u, u]-[u, f']-[f', u]$$

$$=[u-f', u-f']-|f'|^2$$

$$=|u-f'|^2-|f'|^2,$$

从而当 $u=f'$ 时，$F(f')=-|f'|^2$，这说明 f' 是 $F(u)$（扩充定义于 H_A 上的）这一泛函的极小点。

欲求扩充定义了的泛函(2.150)的极小点，也即使 $F(u)$ 取极小值的元，Ritz 方法提供了一种近似算法。

设 $d=\min\limits_{u\in H_A} F(u)$，如果能够找到一列 $\{u_n\}\subset H_A$ 使得 $d=\lim\limits_{n} F(u_n)$ 则称 $\{u_n\}$ 为 $F(u)$ 的**极小化列**。

定理2.18 如果 A 在 $D(A)$ 上是对称正定线性算子，那末 $F(u)$ 的每一个极小化列 $\{u_n\}$，无论在 H 范数下或在 H_A 范数下都收敛于泛函 $F(u)$ 的极小点 f'。

证 因 $d=\min F(u)=F(f')$，又因为

$$F(u)=[u, u]-[u, f']-[f', u]$$

$$=[u-f', u-f']-[f', f']$$

$$=|u-f'|^2-|f'|^2,$$

从而

$$d=F(f')=-|f'|^2.$$

根据极小元的定义

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n)=\lim_{n\to\infty}(|u_n-f'|^2-|f'|^2)=d,$$

故

$$\lim_{n} |u_n-f'|=0.$$

由式(2.151)也得

$$\lim_{n} \|u_n-f'\|=0.$$

现在转入极小化列的构造及 Ritz 解法的几何解释。

假定$\{v_n\}$，$n\in N$ 是 D(A)上一族线性无关元，而且它是 H_A 的完备系，即对任一元 $u\in H_A$ 均可由$\{v_n\}$的元的线性组合在 H_A 范数下逼近它．取

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_kv_k,\quad n\in N, \tag{2.152}$$

选择恰当的 a_k，$k=1, 2, \cdots, n$ 使泛函

$$F(u_n)=\sum_{j,k=1}^{n}a_j\overline{a}_k(Av_j, v_k)-\sum_{j=1}^{n}a_j(v_j, f)=\sum_{j=1}^{n}\overline{a_j}(f, v_j)$$

取极小值，因而有

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial\alpha_k}=0,\quad \frac{\partial F(u_n)}{\partial\beta_k}=0,\quad a_k=\alpha_k+i\beta_k,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(Av_k, v_i)=(f, v_i),\quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{2.153}$$

方程(2.153)称为 **Ritz 方程**．因为 v_1，v_2，…，v_n 在 H_A 中线性无关，故 $\det|[v_k, v_j]|\neq0$，从而(2.153)在存唯一的解 a_1，a_2，…，a_n．再将它们代入式(2.152)即得 u_n ($n\in N$)．

现在证明这样构造的$\{u_n\}$是扩充了的泛函 (2.150) 的极小化列：

由于 $d=\min F(u)$，故存在 $v\in H_A$，使得

$$d\leqslant F(v)\leqslant d+\frac{\varepsilon}{2},$$

又因$\{v_i\}$是 H_A 的完备系，故可选得 $\{\alpha_i^{(n)}\}$($i\in N$)使

$$v^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}v_i,\quad |v^{(n)}-v|\to0,$$

从而 $\forall \varepsilon>0$，当 $n\geqslant n_0$ 时 $|F(v^{(n)})-F(\dot{v})|<\frac{\varepsilon}{2}$，且

$$d\leqslant F(v^{(n)})<F(v)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant d+\varepsilon.$$

根据 u_n 的定义，显然 $F(u_n)\leqslant F(v^{(n)})$，故有

$$d\leqslant F(u_n)\leqslant F(v^{(n)})\leqslant d+\varepsilon \quad 即 \quad d=\lim_n F(u_n).$$

通常称由公式(2.152)所构造的 $u_n(n\in N)$ 为 Ritz 近似解。这样的 u_n 我们也可以看作方程(2.149)的解 u 的投影。事实上，记 H_n 为由 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 所生成的 n 维子空间，并设 P_n^A: $H_A\to H_n$ 是正交投影算子。方程(2.153)可以改写为

$$\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right),\ v_i\right)=(Au,\ v_i), \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

或

$$[u_n-u,\ v_i]=0, \qquad i=1, 2, \cdots, n.$$

它表明 u_n-u 在 H_A 的内积意义下正交于 H_n，即 $u_n=P_n^A u$。

例2.19 考虑边值问题

$$\begin{cases} Au\equiv -\dfrac{du^2}{d^2x}=\dfrac{1}{1+x} \\ u(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{2.154}$$

的求解问题。我们把 A 看作是 $L^2(0, 1)$ 上的算子，当 $u, v\in C^2[0, 1]$ 并注意到边界条件，算得 $(Au, v)=(u, Av)$，而且由于 $u(0)=0$ 知

$$u(x)=\int_0^x \frac{du}{dx}\,dx,$$

故由 Schwarz 不等式得

$$u^2(x)\leqslant x\int_0^x\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\leqslant x\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx,$$

从而 $\|u\|^2\leqslant\frac{1}{2}(Au, u)$，即 A 在定义域内是对称且正定的。

取 $H=L^2(0, 1)$，H_A 是由在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上绝对连续，在 $x=0$ 处函数值为零并且在$(0, 1)$上具有平方可积的一阶导数的所有函数组成的集合（这时 H_A 实际上是 H^1 的子集合）。其内积和范数为

$$[u, v]=\int_0^1 u'(x)v'(x)dx,\quad |u|^2=\int_0^1 (u'(x))^2dx.$$

又取 $\varphi_k=x^k$, $k\in N$。不难验证，$\{\varphi_k\}$是 H_A 中的完备系。令 $u_n=c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$，得 Ritz 方程：

$$\sum_{k=1}^{n}c_k(A\varphi_k, \varphi_i)=(f, \varphi_i),\quad i=1, 2, \cdots, n, \quad (2.155)$$

其中
$$A\varphi=-\frac{d^2\varphi}{dx^2},\quad f=\frac{1}{1+x}.$$

解出 c_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 即得近似解 u_n。

例如取 $n=2$ 时

$$(A\varphi_1, \varphi_1)=1, (A\varphi_1, \varphi_2)=1, (A\varphi_2, \varphi_1)=1,$$

$$(A\varphi_2, \varphi_2)=\frac{4}{3},$$

$$(f, \varphi_1)=1-\ln 2, (f, \varphi_2)=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

从方程(2.155)解得 $c_1=0.669$, $c_2=-0.36$，故

$$u_2=0.669x-0.36x^2$$

方程(2.154)的准确解是$u(x)=x(1+\ln 2)-(x+1)\ln(x+1)$.

采用类似的手段，也可以讨论高维的二阶线性椭圆型方程边值问题.

2.6 列紧算子方程的投影扰动解法

在实际数值计算中，由于数值扰动，或近似方式的不同，得到的近似方程并不是真正的投影方程，而是有了扰动的投影方程.

设K: $X\to X$线性列紧，X为Banach空间，X_n为X的有限维子空间，$X_n\subset X$且P_n: $X\to X_n$为投影算子，方程

$$\lambda x=Kx+f,\ \lambda\neq 0,\ x\in X,\ f\in X \tag{2.156}$$

的投影方程为

$$\lambda x_n=P_nKx_n+P_nf,\quad x_n\in X_n. \tag{2.157}$$

假定P_nK, P_nf的扰动项分别为S_n及g_n，于是扰动了的投影方程便是

$$\lambda x_n=P_nKx_n+S_nx_n+P_nf+g_n, \tag{2.158}$$

其中$S_n\in L(X)$, $g_n\in X_n$.

本节将在假设扰动项满足

$$\|S_n\|\longrightarrow 0\left(\text{或 } S_n\xrightarrow{ac}0\right),\ \|g_n\|\to 0,\ \text{当 } n\to\infty$$

的前提下，讨论扰动方程(2.158)解的存在性与收敛性问题[28].

首先证明，若$P_n\xrightarrow{p}I$，则

$$K\in L(X)\text{列紧}\Longrightarrow\{P_nK\}\text{族列紧，}\tag{2.159}$$

为此，设集 S 有界，需要证明 $\overline{\bigcup P_nKS}$ 列紧。任取一点列 $\{z_l\}\subset\bigcup P_nKS$，$l\in N$，因为对每一个 z_l，必属于某集 $P_{n_l}KS$ 之中，无妨设 $n_l\to\infty(l\to\infty)$，记 z_l 对应的原象为 $x_l\in S$，由于K 是列紧算子，从而 $K(x_l)\to y_o$，$l\in N'$。又因为 $P_n\xrightarrow{c}I$（见§1.4），故 $P_{n_l}K(x_l)\longrightarrow y_o(l\to\infty)$，从而 $\|y_o-z_l\|=\|y_o-P_{n_l}Kx_l\|\to0$，(2.159)式得证。

进一步由§1.5得知，$P_nK\xrightarrow{cc}K$，这是因为由 $P_n\xrightarrow{p}I$ 推得 $P_nK\xrightarrow{p}K$，而 P_nK 的连续性是明显的。

另一方面，若 $L_n\in L(X)$，则由式(1.26)得

$$\|L_n\|\longrightarrow0\Longrightarrow L_n\xrightarrow{ac}0,\tag{2.160}$$

因此，由渐近列紧的定义，有

$$K_n\xrightarrow{cc}K,\ \|L_n\|\longrightarrow0(\text{或 }L_n\xrightarrow{ac}0)\Longrightarrow$$

$$K_n+L_n\xrightarrow{ac}K.\tag{2.161}$$

根据上面分析，如果假定 $K\in L(X)$ 是列紧的，并记

$$K_nx_n=P_nKx_n+S_nx_n+g_n,\ \ f_n=P_nf,$$

则 $K_n\xrightarrow{ac}K$ 且(2.158)式可以改写为

$$\lambda x_n=K_nx_n+f_n,\ \lambda\neq0.\tag{2.162}$$

为了讨论(2.158)或等价的(2.162)的可解性、解的收敛性及误差估计，需要下面若干引理，在给出这些引理之前，一律假定 K_n、$K\in L(X)$，$n\in N$。

引理2.2 设 $K_n \xrightarrow{cc} K$ 或 $K_n \xrightarrow{ac} K$，则 K 为列紧算子且

$$\|(K_n-K)K\|\to 0,\ \|(K_n-K)K_n\|\to 0\ (n\to\infty). \tag{2.163}$$

证 由(1.28)式知 $K_n \xrightarrow{cc} K \Longrightarrow K_n \xrightarrow{ac} K$，因此只需证明 $K_n \xrightarrow{ac} K \Longrightarrow K$ 列紧.

事实上，若集合列 $\{S_n\}$ d-列紧，则它的聚点集 $\{S_n\}^*$ 必然为列紧集（定理1.1），因此当假设 S 为有界集时，由于 K_n 为渐近列紧，从而 $\{K_n(S)\}$ 是 d-列紧而且 $\{K_n(S)\}^*$ 为列紧的. 又因为 $K_n \xrightarrow{p} K$，故 $\overline{K(S)}\subset\{K_n(S)\}^*$，从而 $\overline{K(S)}$ 也是列紧的，即 K 为列紧算子.

现在利用定理1.3可推得 $\|(K_n-K)K\|\to 0$. 又因为对任何有界集 S，$\{K_n(S)\}$ d 列紧，因此再次利用定理1.3推得 $\|(K_n-K)K_n\|\to 0$ 成立.

引理2.3 若 $K_n \xrightarrow{ac} K$，则 $(I-K)^{-1}$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $n\geqslant n_0$ 时 $(I-K_n)^{-1}$ 存在且一致有界.

证 例1.16推得 $(I-K_n) \xrightarrow{r} I-K$，故由定理1.6得知，$(I-K)^{-1}$ 存在 $\Longleftrightarrow (I-K_n)^{-1}$ 存在且一致有界，$\forall n$ 充分大.

引理2.4 若 $K_n \xrightarrow{ac} K$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 n_0 使 $\bigcup\limits_{n\geqslant n_0} K_nU$ 有有限的 ε-网，其中 U 为单位球面，即 $U=\{x:\|x\|=1\}$.

证 由定理1.1知 $\{K_nU\}^*$ 列紧，因而是全有界的，故 $\forall\varepsilon>0$，存在有限集合 $O_\varepsilon\subset X$，使

$$\{K_nU\}^*\subset \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}(O_\varepsilon),$$

再应用定理1.1得 $K_nU\to\{K_nU\}^*$，$n\geqslant n_0$；

$$K_nU\subset\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}(\{K_nU\}^*)\subset\Omega_\varepsilon(O_\varepsilon),\ n\geqslant n_0,$$

即 $\bigcup_{n\geqslant n_0}K_nU$ 有有限 ε-网。

回顾线性算子的一个基本性质(参考附录一)：若 $A\in L(X)$，则存在唯一的升指数(ascent indices)$\alpha(A)=\alpha$ 和降指数(defect indices)$\delta(A)=\delta$，它们均为非负整数或 $+\infty$，使得

$$\left.\begin{array}{l}N(A^m)\subsetneqq N(A^{m+1})\Longleftrightarrow m<\alpha,\\ R(A^m)\supsetneqq R(A^{m+1})\Longleftrightarrow m<\delta,\end{array}\right.\quad m=0,1,2,\cdots$$

且
$$A^{-1}\text{存在}\Longleftrightarrow\alpha=0,\ R(A)=X\Longleftrightarrow\delta=0,$$

$$\alpha<+\infty,\ \delta<+\infty\Longrightarrow\alpha=\delta.$$

引理2.5 若 $K_n\xrightarrow{ac}K$，则当 n 充分大时

$$\alpha(I-K_n)<+\infty,\ \delta(I-K_n)<+\infty.$$

证 今取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，$0<\varepsilon<1-2\varepsilon_0$。因 $K_n\xrightarrow{ac}K$ 推得存在 n_0 使 $\bigcup_{n\geqslant n_0}K_nU$ 有有限 ε_0-网，其中 $U=\{x:\ \|x\|=1\}$。如果 $\alpha(I-K_n)=+\infty$，则 $\forall m$ 有

$$N(A^m)\subsetneqq N(A^{m+1})\Longleftrightarrow m<+\infty\ (A=I-K_n),$$

于是根据 Riesz 引理（见附录一），存在 $x_m\in N((I-K_n)^m)$ 使 $\|x_m\|=1$，$\|x_m-v\|\geqslant1-\varepsilon>2\varepsilon_0>0$，$\forall v\in N((I-K_n)^{m-1})$。

设 $K_nx_m-K_nx_i=x_m-v(i<m)$，显然

$$v=x_i-(I-K_n)x_i+(I-K_n)x_m\in N((I-K_n)^{m-1}),$$

故得$\|x_j\|=1$，$j\in N$ 使

$$\|K_n x_i - K_n x_m\| \geqslant 1-\varepsilon > 2\varepsilon_0 > 0 \quad (i<m),$$

此与$\{K_n U\}(n\geqslant n_0)$存在有限 ε_0- 网矛盾。

类似地，若设 $\delta(I-K_n)=+\infty$，也矛盾，引理得证。

引理2.6 若$K_n \xrightarrow{ac} K$，$(I-K_n)^{-1}$存在$(n\geqslant n_0)$，则 $R(I-K_n)=X$。

证 由引理 2.5 推得 $\delta(I-K_n)=\alpha(I-K_n)$，已知$(I-K_n)^{-1}$ 存在，所以

$$0=\alpha(I-K_n)=\delta(I-K_n),$$

从而 $R(I-K_n)=X$。

由引理2.2，2.3及2.6立刻推出

引理2.7 若 $K_n \xrightarrow{ac} K$，则 $(I-K)^{-1}\in L(X)$ 的充要条件是$(I-K_n)^{-1}\in L(X)$且一致有界$(\forall n\geqslant n_0)$。

引理2.8 设 T 是 Banach 空间 X 中的列紧算子，S，$(\lambda-S)^{-1}\in L(X)$且

$$\Delta=\|(\lambda-S)^{-1}(T-S)T\|<|\lambda|, \tag{2.164}$$

则$(\lambda-T)^{-1}$ 于 X 存在且有界，即$(\lambda-T)^{-1}\in L(X)$，又

$$\|(\lambda-T)^{-1}\|\leqslant \frac{1+\|(\lambda-S)^{-1}\|\|T\|}{|\lambda|-\Delta}. \tag{2.165}$$

若 f，g 分别满足方程

$$(\lambda-S)f=h,\ (\lambda-T)g=r, \tag{2.166}$$

则

$$\|f-g\|\leqslant\|(\lambda-S)^{-1}\|\frac{\|(S-T)T\|\|f\|+\|(S-T)r\|+|\lambda|\|h-r\|}{|\lambda|-\Delta} \tag{2.167}$$

或

$$\|f-g\|\leqslant\|(\lambda-T)^{-1}\|\|(S-T)f+(h-r)\|. \tag{2.168}$$

证 因 $\lambda I=(\lambda I-S)+S$，所以 $(\lambda-S)^{-1}=\frac{1}{\lambda}[I+(\lambda-S)^{-1}S]$，记 $B=\frac{1}{\lambda}[I+(\lambda-S)^{-1}T]$，从而 $B(\lambda-T)=I-A$，其中 $A=\frac{1}{\lambda}(\lambda-S)^{-1}(T-S)T$，由(2.164)式知 $\|A\|<1$，故 $(I-A)^{-1}\in L(X)$，由此得 $(I-A)^{-1}B(\lambda-T)=I$．这表明 $(\lambda-T)^{-1}=(I-A)^{-1}B$．又因 T 为列紧算子，从而由 Fredholm 择一定理知 $(\lambda-T)^{-1}\in L(X)$ 且

$$\|(\lambda-T)^{-1}\|\leqslant\frac{\|B\|}{1-\|A\|}\leqslant\frac{1+\|(\lambda-S)^{-1}\|\|T\|}{|\lambda|-\Delta},$$

此即(2.165)式．

今设 f,g 满足(2.166)式，故有

$$\begin{aligned}\lambda(f-g)&=(Sf-Tg)+(h-r)\\&=S(f-g)+(S-T)g+(h-r),\end{aligned}$$

即
$$(f-g)=(\lambda-S)^{-1}[(S-T)g+(h-r)] \tag{2.169}$$

类似地

$$(f-g)=(\lambda-T)^{-1}[(S-T)f+(h-r)]. \tag{2.170}$$

由(2.170)式立即得(2.168)，将 $g=\frac{1}{\lambda}(Tg+r)$ 代入上面的(2.169)得

$$\begin{aligned}f-g&=\frac{1}{\lambda}(\lambda-S)^{-1}(S-T)(Tg+r)+(\lambda-S)^{-1}(h-r)\\&=\frac{1}{\lambda}(\lambda-S)^{-1}(S-T)T(g-f)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\lambda}(\lambda-S)^{-1}(S-T)(Tf+r)$$

$$+(\lambda-S)^{-1}(h-r),$$

$$f-g=[\lambda-(\lambda-S)^{-1}(T-S)T]^{-1}$$

$$\times[(\lambda-S)^{-1}(S-T)(Tf+r)+\lambda(\lambda-S)^{-1}(h-r)],$$

由此可得(2.167)式.

定理2.19 设 X 为 Banach 空间,K_n、$K\in L(X)$, $n\in N$; $K_n\xrightarrow{cc}K$ 或 $K_n\xrightarrow{ac}K$; 存在$(\lambda-K)^{-1}\in L(X)$, $\lambda\neq 0$, 则

$$\Delta_n=\|(\lambda-K)^{-1}(K_n-K)K_n\|\to 0,\ n\to\infty;$$

又当 n 充分大以后, $(\lambda-K_n)^{-1}\in L(X)$且

$$\|(\lambda-K_n)^{-1}\|\leqslant\frac{1+\|(\lambda-K)^{-1}\|\|K_n\|}{|\lambda|-\Delta_n},\tag{2.171}$$

从而$(\lambda-K_n)^{-1}$一致有界(因 $K_n\xrightarrow{p}K$), 又若 f、f_n 分别满足

$$(\lambda-K)f=h,\ (\lambda-K_n)f_n=h_n,\tag{2.172}$$

则有

$$\|f-f_n\|\leqslant\|(\lambda-K)^{-1}\|\times\frac{\|(K-K_n)K_n\|\|f\|+\|(K-K_n)h_n\|+|\lambda|\|h-h_n\|}{|\lambda|-\Delta_n},\tag{2.173}$$

$$\|f-f_n\|\leqslant\|(\lambda-K_n)^{-1}\|\|(K-K_n)f+(h-h_n)\|.\tag{2.174}$$

证 当 $K_n\xrightarrow{cc}K$ 时, K_n 也列紧$(n\in N)$. 故由引理2.2得 $\Delta_n\to 0$, 在引理2.8中置 $S=K$, $T=K_n$ 即得结论. 对 $K_n\xrightarrow{ac}K$ 的情形, K_n 不一定是列紧算子, 这时置 $K_n=T$, 采用引理 2.8

的运算步骤并引用引理2.7得知结论也成立。

类似地有

定理2.20 设 X 为 Banach 空间，K_n、$K\in L(X)$，$n\in N$；$K_n\xrightarrow{cc}K$ 或 $K_n\xrightarrow{ac}K$；当 n 充分大以后，$(\lambda-K_n)^{-1}\in L(X)(\lambda\neq0)$且一致有界，则

$$\Delta_n'=\|(\lambda-K_n)^{-1}(K-K_n)K\|\to0\quad(n\to\infty)$$

且
$$(\lambda-K)^{-1}\in L(X),$$

$$\|(\lambda-K)^{-1}\|\leqslant\frac{1+\|(\lambda-K_n)^{-1}\|\|K\|}{|\lambda|-\Delta_n'},\tag{2.175}$$

若 f、f_n 分别满足(2.172)式，则有

$$\|f-f_n\|\leqslant\|(\lambda-K_n)^{-1}\|\times\frac{\|(K-K_n)K\|\|f_n\|+\|(K-K_n)h\|+|\lambda|\|h-h_n\|}{|\lambda|-\Delta_n'}\tag{2.176}$$

或

$$\|f-f_n\|\leqslant\|(\lambda-K)^{-1}\|\|(K-K_n)f_n+(h-h_n)\|.\tag{2.177}$$

本定理的证明可由引理2.8而得。

现在转向讨论方程(2.162)或(2.158)。

定理2.21 设 $K\in L(X)$是列紧的，$(\lambda-K)^{-1}$存在而且有界；投影算子 P_n: $X\to X_n$ 满足 $P_n\xrightarrow{p}I$，则方程(2.156)以及其扰动的投影方程(2.162)(或(2.158))当 n 充分大以后在 X上均存在唯一解。如果分别记其解为 x_0 及 x_n，则 $x_n\to x_0(n\to\infty)$且有如下估计

$$\|(\lambda-K_n)^{-1}\|\leqslant\frac{1+\|(\lambda-K)^{-1}\|\|K_n\|}{|\lambda|-\Delta_n}\quad(n\text{充分大}),\tag{2.178}$$

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|(\lambda - K)^{-1}\| \times \frac{\|(K-K_n)K_n\|\|x_0\| + \|(K-K_n)P_n f\| + |\lambda|\|P_n f - f\|}{|\lambda| - \Delta_n}, \tag{2.179}$$

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|(\lambda - K_n)^{-1}\|\|(K-K_n)x_0 + f - P_n f\| \tag{2.180}$$

或 $$\|x_n - x_0\| \leqslant \|(\lambda - K_n)^{-1}\|[(\|P_n K\| + \|\lambda - K_n\|)\|P_n x_0 - x_0\| + \|S_n\|\|P_n x_0\| + \|g_n\|], \tag{2.181}$$

其中 $\Delta_n = \|(\lambda - K)^{-1}(K_n - K)K_n\|$。

定理2.21实际上是定理2.5的一个推广，因为当 $S_n = 0$，$g_n = 0$时，$P_n K = K_n$，所以式(2.180)就是(2.50)。

证 (2.156)式解的存在、唯一性是明显的。又根据本节开始的分析，$K_n \xrightarrow{ac} K$，引用定理2.19，估计式(2.178)成立，从而(2.162)（等价的(2.158)）当 n 充分大时也存在唯一解 x_n，且有估计式(2.179)、(2.180)。由 $P_n \xrightarrow{p} I$ 及 $K_n \xrightarrow{p} K$，从而式(2.179)、(2.180)中任一个都可推得 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$。

证明估计式(2.181)。因为 x_0、x_n 分别为(2.156)及(2.162)（等价的(2.158)）的解，故有

$$(\lambda - K_n)(x_n - P_n x_0) = P_n f - \lambda P_n x_0 + K_n P_n x_0.$$

又因 $\lambda P_n x_0 = P_n K x_0 + P_n f$，故

$$(\lambda - K_n)(x_n - P_n x_0) = (K_n P_n x_0 - P_n K x_0),$$

$$\|x_n - P_n x_0\| \leqslant \|(\lambda - K_n)^{-1}\|\|K_n P_n x_0 - P_n K x_0\|.$$

记 $P^n = I - P_n$，则有

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|P_n(x_n - x_0)\| + \|P^n(x_n - x_0)\| = \|x_n - P_n x_0\| + \|P^n x_0\|,$$

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \|(K_n P_n x_0 - P_n K x_0)\| + \|P^n x_0\|.$$

根据 K_n 的定义，$K_n P_n x_0 = P_n K P_n x_0 + S_n P_n x_0 + g_n$,

$$K_n P_n x_0 - P_n K x_0 = P_n K(P_n x_0 - x_0) + S_n P_n x_0 + g_n,$$

所以

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|(\lambda - K_n)^{-1}\| (\|P_n K\| \|P_n x_0 - x_0\|$$
$$+ \|S_n\| \|P_n x_0\| + \|g_n\|)$$
$$+ \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \|(\lambda - K_n)(P_n x_0 - x_0)\|$$
$$\leqslant \|(\lambda - K_n)^{-1}\| [(\|P_n K\| + \|\lambda - K_n\|) \|P_n x_0 - x_0\|$$
$$+ \|S_n\| \|P_n x_0\| + \|g_n\|].$$

推论 设 $T \in L(X)$ 列紧，投影算子 P_n: $X \to X_n$ 满足 $P_n \xrightarrow{p} I$；方程

$$x = Tx + f, \quad x \in X, \quad f \in X \tag{2.182}$$

的近似方程为

$$x_n = T_n x_n + f_n, \quad x_n \in X_n, \quad f_n \in X_n, \tag{2.183}$$

其中 T_n: $X_n \to X_n$。若记 $S_n = T_n - P_n T$，$g_n = f_n - P_n f$ 并设 $\|S_n\| \to 0$（或 $S_n \xrightarrow{ac} 0$），$g_n \to 0$，则当 $(I-T)^{-1} \in L(X)$ 时，原始方程(2.182)与近似方程(2.183)当 n 充分大以后都存在唯一解，而且近似解收敛于原方程的解。

例2.20 假定积分算子 K:

$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t, s) x(s) ds \tag{2.184}$$

的核 $k(t, s)$ 在 $0 \leqslant t$、$s \leqslant 1$ 上连续，K: $C[0, 1] \to C[0, 1]$；对任意 $x(t) \in C[0, 1]$，数值积分公式

$$\Phi_n x = \sum_{j=1}^{n} w_{nj} x(t_{nj}), \qquad 0 \leqslant t_{nj} \leqslant 1$$

收敛于积分 $\Phi x = \int_0^1 x(t)dt$，因此积分方程

$$\lambda x(t) - \int_0^1 k(t, s)x(s)ds = f(t), \quad \lambda \neq 0 \tag{2.185}$$

的数值积分近似形式是

$$\lambda x_n(t) - \sum_{j=1}^{n} w_{nj} k(t, s_{nj}) x_n(s_{nj}) = f(t), \tag{2.186}$$

其中 $f \in C[0, 1]$. 假定投影算子 P_m: $X \to X_m$ 满足条件$P_m \xrightarrow{p} I$ ($m \to \infty$)，其中 $X = C[0, 1]$，$X_m \subset X$ 且 $\dim X_m = m$. 方程(2.185)的算子形式是

$$\lambda x - Kx = f, \quad \lambda \neq 0, \tag{2.187}$$

它的投影方程为 $\lambda x_m - P_m K x_m = P_m f$. 根据(2.60)式，其具体形式为

$$\lambda x^m(t) - \int_0^1 k^m(t, s)x^m(s)ds = f^m(t), \tag{2.188}$$

其中 $k^m(t, s) = (P_m k^s)(t)$ (见(2.59))，$f^m(t) = (P_m f)(t)$，而 $x_m(t) = (P_m x)(t)$. 借助于数值积分公式，类同于(2.186)式，方程(2.188)的近似方程为

$$\lambda x_n^m(t) - \sum_{j=1}^{n} w_{nj} k^m(t, s_{nj}) x_n^m(s_{nj}) = f^m(t), \tag{2.189}$$

它是求解(2.185)时进行数值计算的实用形式，其中 x_n^m 可以由满足下面方程的 $x_n^m(t_{ni})$来确定

$$\lambda x_n^m(t_{ni}) - \sum_{j=1}^{n} w_{nj} k^m(t_{ni}, s_{nj}) x_n^m(s_{nj}) = f^m(t_{ni}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.190}$$

其中取 $t_{ni}=s_{ni}$. 将方程(2.189)写成算子形式:

$$(\lambda-K_n^m)x_n^m=f^m, \tag{2.191}$$

其中

$$\begin{aligned}K_n^m x_n^m&=\sum_{j=1}^{n}w_{nj}k^m(t,\ s_{nj})x_n^m(s_{nj})\\&=\sum_{j=1}^{n}w_{nj}k^m(t,\ s_{nj})x^m(s_{nj}).\end{aligned} \tag{2.192}$$

也可将(2.189)式改写成

$$\begin{aligned}&\lambda x^m(t)-\int_0^1 k^m(t,\ s)x^m(s)ds\\&\quad+\left(\int_0^1 k^m(t,\ s)x^m(s)ds-\sum_{j=1}^{n}w_{nj}k^m(t,\ s_{nj})x^m(s_{nj})\right)\\&=f^m(t),\end{aligned} \tag{2.193}$$

其算子形式:

$$\lambda x^m-P_mKx^m+S_mx^m=f^m, \tag{2.194}$$

其中

$$P_mKx^m=\int_0^1 k^m(t,\ s)x^m(s)ds. \tag{2.195}$$

它与(2.60)式所表示的算子本质上是一样的,

$$S_mx^m=P_mKx^m-\sum_{j=1}^{n}w_{nj}k^m(t,\ s_{nj})x^m(s_{nj}). \tag{2.196}$$

由于假定积分公式 $\Phi_n(x)\to\Phi(x)$, 从而

$$\sum_{j=1}^{n}|w_{nj}|\leqslant b<+\infty, \tag{2.197}$$

因此 P_mK、S_m 均为映 $C[0,1]\to C[0,1]$ 的有界线性算子. 如果能够证明

a) $P_m K \xrightarrow{cc} K$,

b) $S_m \xrightarrow{ac} 0$;

那末定理 2.21的推论就可以应用到现在所讨论的问题。为此目的，假定 $n \geqslant m$（实际应用中经常是这样）而且可以认为 n 是 m 的函数，即 $n = n(m)$。又因为 $k(t, s)$ 在 $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ 连续，因此(2.184)所表示的算子 K：$C[0, 1] \to C[0, 1]$ 是列紧算子，从而由本节开始的讨论知 $P_m K \xrightarrow{cc} K$。

证明 $S_m \xrightarrow{ac} 0$，记

$$K_n^m x = \sum_{j=1}^{n} w_{nj} k^m(t, s_{nj}) x(s_{nj}), \qquad (2.198)$$

$$K^m x = P_m K x,$$

$$K_n x = \sum_{j=1}^{n} w_{nj} k(t, s_{nj}) x(s_{nj}),$$

则由(2.61)式得

$$K_n x \to Kx, \quad \forall x \in C[0, 1].$$

不难看出 $P_m K_n = K_n^m$，因此当 $m \to \infty$ 时，由 $K_n \xrightarrow{p} K$ 及 $P_m \xrightarrow{c} I$ 推得

$$K_n^m x \to Kx, \ \forall x \in C[0, 1], \ m \to \infty.$$

又由 $\qquad \|K^m x - K_n^m x\| \leqslant \|K_n^m x - Kx\| + \|Kx - K^m x\|$

推出 $\qquad K^m x - K_n^m x \to 0, \quad \forall x \in C[0, 1]$,

即 $S_m \xrightarrow{p} 0$，$m \to \infty$。由表达式(2.197)及(2.198)、(2.59)得

$$\|K_n^m\| \leqslant b\|k^m\| \leqslant b\|(P_m k^s)(t)\|$$

$$\leqslant d \max_{s,t} |k(t, s)|, \quad d \text{ 为常数}; \qquad (2.199)$$

又

$$|(K_n^m x)(t) - (K_n^m x)(t')|$$

$$\leqslant b\|x\| \max_s |k^m(t, s) - k^m(t', s)|, \qquad (2.200)$$

而集合 $\{k^s(t): 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ 一致有界且等同连续于$[0, 1]$，故

$$\|k^m - k\| = \max_{s,t} |(P_m - I)k^s(t)|$$

$$= \max_s \|(P_m - I)k^s\| \to 0, \qquad (2.201)$$

因此 k^m 在 $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ 上一致收敛于 k，从而 $\{k^m\}$ 是一致有界且等同连续。再利用(2.200)式得知，当 $\|x\| \leqslant 1$ 时，$\{(K_n^m x)(t)\}$ 也是一致有界且等同连续，这意味着 $\{K_n^m\}$ 是族列紧列。因此 $\{S_m = K^m - K_n^m\}$ 也是族列紧算子列，由此得到 $\{S_m\}$ 是渐近列紧算子列且 $S_m \xrightarrow{ac} 0$。

应用定理2.21的推论，如果 $(\lambda - K)x = 0$ 只有零解，则方程(2.189)当 m 充分大以后存在唯一解 x_n^m 且 x_n^m 收敛于(2.185)的解。

2.7 计算过程中的稳定性

正如在前几节所见到的，通过投影方法所获得的近似方程，一般具有如下形式

$$A_n x_n = y_n, \qquad (2.202)$$

其中 A_n 是映某个 Banach 空间 E_n 于另一个 Banach 空间 F_n 的算子，$\dim E_n = \dim F_n = n$，通常还假设 A_n^{-1} 存在。然而在

实际计算过程中，数据会有一定的误差，因而(2.202)变成

$$(A_n+\Gamma_n)z_n=y_n+\delta_n, \tag{2.203}$$

其中 Γ_n、δ_n 为数据 A_n、y_n 的扰动，前面我们讨论过这种扰动方程解的存在性与收敛性问题，本节将讨论数值计算过程中的稳定性问题。

如果存在与 n 无关的常数 γ、p、q，当 $\|\Gamma_n\|\leqslant\gamma$ 时，对任意的 δ_n，方程(2.203)也是可解的（其解记为 z_n）而且(2.202)、(2.203)式的解满足关系

$$\|x_n-z_n\|\leqslant p\|\Gamma_n\|+q\|\delta_n\|, \tag{2.204}$$

则称方程(2.202)**在计算过程中是稳定的。**

定理2.22 为使方程(2.202)在计算过程中稳定，其充要条件为：存在与 n 无关的常数 c_1、c_2 使得

a) $\|A_n^{-1}\|\leqslant c_1$;

b) 对任意的具有范数为1并映 E_n 于 F_n 的算子列 $\{B_n\}$ 下述不等式成立

$$\|A_n^{-1}B_nA_n^{-1}y_n\|_{E_n}=\|A_n^{-1}B_nx_n\|_{E_n}\leqslant c_2.$$

证 必要性：记 $\eta_n=z_n-x_n$，取 $\Gamma_n=0$，从(2.204)得 $\|\eta_n\|\leqslant q\|\delta_n\|$，又 $A_n\eta_n=A_nz_n-A_nx_n=\delta_n$，故得 $\|A_n\eta_n\|\geqslant\dfrac{1}{q}\|\eta_n\|$，即 $\|A_n^{-1}\|\leqslant q$，于是可取 $c_1=q$。

取 $\delta_n=0$，$\Gamma_n=\varepsilon B_n$，其中 $\|B_n\|=1$ 且 $\varepsilon=\|\Gamma_n\|\leqslant\gamma$，因而从 $(A_n+\Gamma_n)z_n=y_n$ 推得 $z_n+A_n^{-1}\Gamma_nz_n=x_n$ 或

$$z_n-x_n+A_n^{-1}\Gamma_n(z_n-x_n)=-A_n^{-1}\Gamma_nx_n. \tag{2.205}$$

因 $$\|A_n^{-1}\Gamma_nx_n\|=\varepsilon\|A_n^{-1}B_nx_n\|=\|\Gamma_n\|\|A_n^{-1}B_nx_n\|,$$

$$\|A_n^{-1}\Gamma_n(z_n-x_n)\|=\varepsilon\|A_n^{-1}B_n(z_n-x_n)\|$$

$$\leqslant \varepsilon \|A_n^{-1}\| \|z_n - x_n\|$$

$$\leqslant \varepsilon q \|z_n - x_n\|,$$

所以由(2.205)式有

$$\|z_n - x_n\| + \varepsilon q \|z_n - x_n\| \geqslant \|A_n^{-1}\Gamma_n x_n\|,$$

即
$$\|\eta_n\| = \|z_n - x_n\| \geqslant \frac{\|\Gamma_n\| \|A_n^{-1}B_n x_n\|}{1+\varepsilon q}.$$

将它 与(2.204)式比较并且此刻取 $\delta_n = 0$，得

$$\|A_n^{-1}B_n x_n\| \leqslant p(1+\varepsilon q).$$

因为 ε 可取为任意小的数，从而 $\|A_n^{-1}B_n x_n\| \leqslant p$，即取

$$c_2 = p.$$

充分性：设a)，b)成立，取 $\gamma = \frac{\beta}{c_1}$，$\beta$ 为常数，$0<\beta<1$，若 $\|\Gamma_n\| \leqslant \gamma$，由条件a)有 $\|\Gamma_n\| \|A_n^{-1}\| \leqslant \frac{\beta}{c_1} \cdot c_1 < 1$，故由定理2.1得

$$\|(I + A_n^{-1}\Gamma_n)^{-1}\| < \frac{1}{1-\beta}. \tag{2.206}$$

利用定理2.2可知 $A_n + \Gamma_n$ 也是可逆的，而且 $\|(A_n + \Gamma_n)^{-1}\| \leqslant \frac{c_1}{1-\beta}$，即存在 γ，使(2.203)式可解。剩下需要证明存在 p，q 使式(2.204)成立，设 $z_n^{(1)}$、$z_n^{(2)}$ 使

$$(A_n + \Gamma_n) z_n^{(1)} = y_n, \quad (A_n + \Gamma_n) z_n^{(2)} = \delta_n, \tag{2.207}$$

故 $z_n = z_n^{(1)} + z_n^{(2)}$，$\eta_n = (z_n^{(1)} - x_n) + z_n^{(2)}$。如果 $\Gamma_n = 0$，则 $z_n^{(1)} = x_n$，$z_n^{(2)} = \eta_n$，由(2.207)知，此时

$$\|\eta_n\| = \|z_n^{(2)}\| \leqslant \|A_n^{-1}\| \|\delta_n\| \leqslant c_1 \|\delta_n\|,$$

这表明结论成立。如果 $\Gamma_n \neq 0$，则令 $\Gamma_n = \|\Gamma_n\| B_n$，其中 $\|B_n\|$

$=1$，此时由(2.207)的第二式以及(2.206)可得

$$(I+A_n^{-1}\Gamma_n)z_n^{(2)}=A_n^{-1}\delta_n,$$

$$z_n^{(2)}=(I+A_n^{-1}\Gamma_n)^{-1}A_n^{-1}\delta_n,$$

从而有

$$\|z_n^{(2)}\|\leqslant c_1\|(I+A_n^{-1}\Gamma_n)^{-1}\|\|\delta_n\|\leqslant c_1\frac{\|\delta_n\|}{1-\beta}. \qquad (2.208)$$

将(2.207)的第一式改写为

$$(I+A_n^{-1}\Gamma_n)z_n^{(1)}=x_n$$

得
$$(I+A_n^{-1}\Gamma_n)(z_n^{(1)}-x_n)=-A_n^{-1}\Gamma_n x_n,$$

故由条件b)及(2.206)式有

$$\|z_n^{(1)}-x_n\|\leqslant\frac{\|A_n^{-1}\Gamma_n x_n\|}{1-\beta}=\frac{\|A_n^{-1}B_n x_n\|}{1-\beta}\|\Gamma_n\|$$

$$\leqslant\frac{c_2}{1-\beta}\|\Gamma_n\|. \qquad (2.209)$$

又由(2.208)、(2.209)式得

$$\|z_n-x_n\|\leqslant\frac{c_2}{1-\beta}\|\Gamma_n\|+\frac{c_1}{1-\beta}\|\delta_n\|.$$

它表明，当 $p=\dfrac{c_2}{1-\beta}$，$q=\dfrac{c_1}{1-\beta}$ 时可使(2.204)成立。

定理2.23 设 $T\in L(X,Y)$，$X_n\subset X$，$Y_n\subset Y$ 为有限维空间，P_n: $Y\to Y_n$；算子方程

$$Tx=f, \quad f\in Y \qquad (2.210)$$

及其投影方程

$$P_nTx_n=P_nf, \; x_n\in X_n\subset X \qquad (2.211)$$

当 n 充分大以后都存在解（分别记其解为 x_0 及 x_n）。记 $\widetilde{P_nT}$ 为

P_nT 在 x_n 上的限制，并设 $x_n \to x_0$ 且存在常数 c 使

$$\|(\widetilde{P_nT})^{-1}\| \leqslant c, \quad n \geqslant n_0, \tag{2.212}$$

则方程(2.211)在计算过程中是稳定的。

证 记 $A_n = \widetilde{P_nT}$，如条件(2.212)满足且 x_n 有界，则定理2.22中的条件a)，b)均满足，假设 $x_n \to x_0$，因此确实存在常数 c_3 使得 $\|x_n\| \leqslant c_3$，$n \in N$，从而推得所要的结论。

回忆前面§2.4关于投影算法的讨论，如果假定$\{X_n\}$终归稠于 X，P_n: $Y \to Y_n$ 满足 $P_n \xrightarrow{p} I$ 且算子列$\{P_nT\}$离散渐近正规，又设存在 $T^{-1} \in L(Y, X)$，那末由定理2.10可导致 $(\widetilde{P_nT})^{-1}$ 当 n 充分大时是一致有界的。因而式(2.210)及(2.211)当 n 充分大时存在唯一解，而且 $x_n \to x_0$，因此可保证在计算过程中是稳定的。

一个常用的特例是 Hilbert 空间 H 上的正定算子 $T \in L(H)$，由于这样的 T 满足

$$(Tx, x) \geqslant \alpha \|x\|^2, \quad x \in H, \quad \alpha > 0,$$

这一性质可保证条件(2.212)（这时 $X = Y = H$，P_n 为正交投影算子）对一切 n 均成立。

对 Banach 空间 X 上的 $T = \lambda - K (X = Y)$，其中 K 为一列紧算子，若设$(\lambda - K)^{-1} \in L(X)$，也可以推出

$$\|K - P_nK\| < \frac{1}{\|(\lambda - K)^{-1}\|}, \quad n \geqslant N(\lambda),$$

$$\|(\lambda - P_nK)^{-1}\| \leqslant c, \quad n \geqslant N(\lambda),$$

其中 c 为一常数。计算过程中是否稳定，将决定于近似解是否一致有界。

第 三 章

非线性算子方程的投影解法

本章我们将讨论非线性算子方程的投影解法．比起线性算子方程，非线性问题要复杂得多，例如，对线性情况，比较易于获得解及近似解的唯一性结论，但非线性问题则不然，方程的解及近似解（如果存在的话）常常以集合的形式呈现．此时，近似解的收敛性自然用第一章所介绍的集合的收敛性概念来描述较为方便．对于非线性问题，一般只能获得比较弱的结果，为了得到与线性问题相类似的结果，就必须在使用线性算子的性质之处附加一些相应的条件才行．

本章假设 X、Y 为 Banach 空间，$T: X\to Y$ 是非线性算子．求非线性方程的解，一般可以表述为求 $u_0\in X$，使之满足方程

$$Tu=f,\quad f\in Y, u\in X, \tag{3.1}$$

若这种 u_0 存在，则称 u_0 为方程(3.1)的解．类似地，若 $T: X\to X$，如果有 u_0 满足方程

$$u=Tu,\ u\in X, \tag{3.2}$$

则称 u_0 为 T **的不动点．**

类同于第二章，方程(3.1)、(3.2)的投影方程分别为

$$P_nTu_n=P_nf,\ u_n\in X_n, \tag{3.3}$$

$$u_n=P_nTu_n,\quad u_n\in X_n, \tag{3.4}$$

其中 P_n 为投影算子，在方程(3.3)与(3.4)中，分别映 $Y\to Y_n$

与 $X\to X_n$, $X_n\subset X$, $Y_n\subset Y$.

非线性算子方程解及近似解的存在性（有时还需要讨论是否唯一）及收敛性是这一章讨论的中心议题。在某些情况下还将给出误差估计式，并给出一般理论在微分方程及积分方程数值解中的应用的例子。

正如第二章已经见到的，算子方程可解性的讨论可以有两种途径，其一是先证明原方程的可解性，进一步再讨论其近似解也存在，而且收敛于原方程的解；其二是先讨论近似解的存在性，然后证明近似解在某种意义下有极限且其极限就是原方程的解。在不同的场合，本章将分别采用上述方法之一，但对非线性问题，后一种更为广泛采用。

3.1 压缩型算子方程的投影解

若存在常数 α 使

$$\|Au_1-Au_2\|\leqslant\alpha\|u_1-u_2\|,\ \forall u_1, u_2\in D,$$

则算子 A 称为在区域 $D\subset X$ **满足 Lipschitz 条件**。在上述式中当 $\alpha<1$ 时，称 A 为**压缩算子**。又如果 $D=X$，则称 A 在空间 X 上满足 Lipschitz 条件，相应地，当 $\alpha<1$ 时，称 A 为 X 上的压缩算子。

设 $X_n\subset X$, $\dim X_n=n$, P_n: $X\to X_n$ 且 $P_n\xrightarrow{p}I$; $\|P_n\|\leqslant1$（例如当取 $X=C[0,1]$，P_n 为分片线性插值投影以及当取 X 为 Hilbert 空间，P_n 为正交投影时都能导致 $\|P_n\|\leqslant1$），则有

定理3.1 设 A 为 X 的闭球 D（球心在原点）上的压缩算子且 $AD\subset D$，则算子 A 及其投影算子 P_nA 分别在 D 及 $X_n\cap D$ 上存在唯一的不动点 u_0、u_n，而且

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \|P_n u_0 - u_0\|. \tag{3.5}$$

证 算子 A 在 D 上存在不动点是显然的，今证 P_nA 在 $X_n \cap D$ 上也存在不动点 u_n，事实上，$\forall u_n^{(1)}$、$u_n^{(2)} \in X_n \cap D$，有

$$\|P_n A u_n^{(1)} - P_n A u_n^{(2)}\| \leqslant \|P_n\| \|Au_n^{(1)} - Au_n^{(2)}\|$$

$$\leqslant \alpha \|u_n^{(1)} - u_n^{(2)}\|,$$

即算子 P_nA 局限在 $X_n \cap D$ 上时，也满足压缩算子条件，因而 P_nA 在 $X_n \cap D$ 上存在不动点．设 u_0、u_n 分别满足 $u_0 = Au_0$，$u_n = P_n A u_n$，于是

$$u_n - u_0 = P_n A u_n - Au_0$$

$$= (P_n A u_n - P_n A u_0) + (P_n A u_0 + Au_0),$$

从而推得(3.5)式成立．

在实际问题中，算子 A 有时难以满足压缩条件，即条件 $\alpha < 1$ 不一定成立．假定 H 为实 Hilbert 空间，如果 A: $H \to H$ 满足

$$\|Ax - Ay\| \leqslant N(r)\|x - y\|, \ \|x\|、\|y\| \leqslant r, \tag{3.6}$$

$$(Ax - Ay, x - y) \geqslant m(r)\|x - y\|^2, \ \|x\|、\|y\| \leqslant r \tag{3.7}$$

且 $m(r) > 0$，$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, rm(r) = \infty$，则可证

定理3.2 设 A: $H \to H$ 满足式(3.6)、(3.7)且 $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{m(r)}{N(r)} = \beta$，$0 < \beta \leqslant 1$，则方程

$$Au = f \tag{3.8}$$

$\forall f \in H$ 于某一球 $D = \{x;\ x \in H,\ \|x\| \leqslant r\}$ 上存在唯一解，而且其投影方程

$$P_n A u_n = P_n f \tag{3.9}$$

$\forall f\in H$ 于 $X_n\cap D$ 上也存在唯一解，若记 u_0, u_n 分别为式(3.8)、(3.9)的解，则

$$\|u_0-u_n\|<\frac{1}{1-\alpha}\|P_nu_0-u_0\|, \tag{3.10}$$

其中 $\alpha=\sqrt{1-2am(r)+a^2N^2(r)}$，$a$、$r$ 为适当的正数。

证 引入与式(3.8)等价的方程

$$u=B(a,f)u \tag{3.11}$$

其中 $B(a,f)u=u-aAu+af$。注意，若取 r 充分大，$a(r)=a>0$足够小时，算子 $B(a,f)$在球 D 上满足压缩映射条件。事实上，对$\|x\|\leqslant r$，$\|y\|\leqslant r$，利用式(3.6)与(3.7)有

$$\|B(a,f)x-B(a,f)y\|^2\leqslant(1-2am(r)+a^2N^2(r))\|x-y\|^2, \tag{3.12}$$

而且还可推得 $m(r)\leqslant N(r)$，当取 $a\in\left(0,\frac{2m(r)}{N^2(r)}\right)$ 时，$\alpha=\sqrt{1-2am(r)+a^2N^2(r)}<1$，算子 $B(a,f)$ 为压缩算子，又若取 $a=\frac{m(r)}{N^2(r)}$，则当 r 足够大以后$\|B(a,f)o\|=a\|Ao-f\|\leqslant(1-\alpha)r$，因此存在 r 使得 $B(a,f)D\subset D$，即 $B(a,f)$ 是映 D 于自己的压缩算子。

应用定理3.1于方程(3.11)便得所要结果。

作为一个特殊情况，如果在式(3.6)、(3.7)中的 $N(r)$及$m(r)$对任何 r 分别等于常数 N 及 M，则在(3.12)中取 $a\in\left(0,\frac{2M}{N^2}\right)$时就可以保证 $B(a,f)$是压缩算子。

例3.1 考虑边值问题

$$\begin{cases}-\dfrac{d^2u}{dx^2}+u=\dfrac{1}{2}\cos u-\dfrac{1}{2}\cos(x(x-1))+x(x-1)-2, \\ \qquad\qquad 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0\end{cases} \tag{3.13}$$

的广义解，其求解空间取为 $H_0^1(0,1)$，内积定义为

$$(u, v)_1 = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + uv \right) dx, \ \forall u, v \in H_0^1(0, 1), \quad (3.14)$$

范数定义为

$$\|u\|_1^2 = (u, u)_1, \ \forall u \in H_0^1(0, 1). \quad (3.15)$$

与线性情形一样，上述微分方程边值问题可化为如下弱形式，即求 $u \in H_0^1(0, 1)$，使

$$a(u, v) = b(u, v), \ \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad (3.16)$$

其中

$$a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u \cdot v \right) dx, \quad (3.17)$$

$$b(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cos u - \frac{1}{2} \cos[(x-1)x) + x(x-1) - 2 \right) v dx \ \forall u, v \in H_0^1(0, 1). \quad (3.18)$$

根据 $b(u, v)$的表示式，对任意确定的 $u \in H_0^1$（这里及以后均简记 $H_0^1 = H_0^1(0, 1)$），$b(u, v)$是 H_0^1 上关于 v 的有界线性泛函。因此，采用 例2.12及§2.4 所用 过的方法，可以定 义算子 B: $H_0^1 \to H_0^1$ 使

$$(Bu, v)_1 = b(u, v). \quad (3.19)$$

由于 $b(u, v)$关于 u 是非线性的，因此算子 B 也是非 线性的。由式(3.14)、(3.17)及(3.19)，变分问题(3.16)可以转化为

$$(u, v)_1 = (Bu, v)_1 \quad (3.20)$$

或等价的算子方程

$$u = Bu. \quad (3.21)$$

因 $\quad |(Bu_1 - Bu_2, v)_1| = |b(u_1, v) - b(u_2, v)|$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |\cos u_1 - \cos u_2||v|dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |u_1 - u_2||v|dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_1\|v\|_1 \quad , \ \forall v \in H_0^1$$

取 $v = Bu_1 - Bu_2$，得 $\|Bu_1 - Bu_2\|_1 \leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_1$，即算子 B 是压缩算子，因此方程(3.21)或(3.16)存在唯一解 $u^* \in H_0^1$。假定 $H_n \subset H_0^1$ 是有限维子空间，$n \in N$. 定义正交投影算子 P_n: $H_0^1 \to H_n$，使之满足

$$(u, v)_1 = (P_n u, v)_1, \ u \in H_0^1, \ \forall v \in H_n;$$

又设 $P_n \xrightarrow{p} I$，于是由定理3.1推得(3.21)的投影方程

$$u_n = P_n B u_n \tag{3.22}$$

也存在唯一解 $u_n \in H_n$. 相应地

$$a(u_n, v_n) = b(u_n, v_n), \ v_n \in H_n \tag{3.23}$$

在 H_n 也存在唯一解 u_n^*，并且 $u_n^* \to u^*$.

对于一般的弱非线性变分方程

$$a(u, v) = b(u, v), \ u, v \in H \tag{3.24}$$

其中 H 为 Hilbert 空间，其内积及范数分别记为$(\cdot,\cdot)$及$\|\cdot\|$. $a(u, v)$为 H 上的双线性对称泛函且满足连续性与强椭圆条件，即

$$|a(u, v)| \leqslant \alpha^2\|u\|\cdot\|v\|, \ u, v \in H, \tag{3.25}$$

$$a(u, u) \geqslant \beta^2\|u\|^2, \ u \in H, \tag{3.26}$$

其中 α, β 为正常数，而 $b(u, v)$是 H 上的二元泛函：当 $u \in H$

固定时，它是 H 上的线性有界泛函，而当 $v\in H$ 固定时，是H 上的非线性泛函，并设满足条件

$$|b(u_1, v)-b(u_2, v)|\leqslant\delta\|u_1-u_2\|\cdot\|v\|,\ u_1, u_2, v\in H, \tag{3.27}$$

这时，可以在 H 上定义新内积$(\cdot,\cdot)_A$ 及相应的范数$\|\cdot\|_A$ 如下：

$$(u, v)_A=a(u, v),\ \ u, v\in H,$$

$$\|u\|_A=\sqrt{a(u, u)},\ \ u\in H.$$

显然，范数$\|\cdot\|_A$ 与 $\|\cdot\|$等价，因存在常数 α, β 满足

$$\beta\|u\|\leqslant\|u\|_A\leqslant\alpha\|u\|,\ \ u\in H. \tag{3.28}$$

根据 Riesz 表现定理，方程(3.24)在新内积$(\cdot,\cdot)_A$ 下等价于

$$(u, v)_A=(Bu, v)_A, \tag{3.29}$$

其中算子 B: $H\to H$ 满足

$$(Bu, v)_A=b(u, v),\ \ u, v\in H, \tag{3.30}$$

即

$$u=Bu. \tag{3.31}$$

条件(3.27)及式(3.28)，(3.30)推得

$$\|Bu_1-Bu_2\|_A\leqslant\delta\frac{1}{\beta^2}\|u_1-u_2\|_A,$$

因此，当 $\delta<\beta^2$ 时，B 是 H 上关于范数$\|\cdot\|_A$ 的压缩算子，因而式(3.31)，(3.24)在 H 上存在唯一解。

假设 $H_n\subset H$ 是有限维子空间，$n\in N$。引入投影算子 P_n^a: $H\to H_n$，使

$$(u, v_n)_A=(P_n^a u, v_n)_A,\ \ \forall v_n\in H_n.$$

利用$(\cdot,\cdot)_A$ 的定义，上式可以表示为

$$a(u-P_n^a u, v_n)=0, v_n \in H_n,$$

故 P_n^a 是 a- 投影算子，从而方程(3.31)的投影方程

$$P_n^a u_n = P_n^a B u_n \quad (3.32)$$

可写成 $a(u_n, v_n)=a(Bu_n, v_n)$。而 $a(Bu_n, v_n)=(Bu_n, v_n)_A = b(u_n, v_n)$，故投影方程(3.32)又可以表写成

$$a(u_n, v_n)=b(u_n, v_n), \ \forall v_n \in H_n. \quad (3.33)$$

最后，假定 H_n 是终归稠于 H 的，于是根据定理3.1，方程(3.32)或(3.33)在 H_n 上也存在唯一解 u_n^*, $n\in N$，而且无论在$\|\cdot\|_A$ 还是在$\|\cdot\|$下都有 $u_n^* \to u^*(n\to\infty)$，并可得到相应的误差估计公式。

作为定理3.2的应用，我们考虑下述形式的变分方程

$$a(u, v)=f(v), \ \forall v \in H, \quad (3.34)$$

其中 H 为实 Hilbert 空间，$a(u, v)$为定义在 $H\times H$ 上的二元泛函：对每一个固定的 $u\in H$，$a(u, v)$ 是关于 v 的有界线性泛函，而对每一个固定的 v，$a(u, v)$是 u 的泛函（一般是非线性的），并满足连续性条件

$$|a(u_1, v)-a(u_2, v)| \leqslant M_1\|u_1-u_2\|_H\|v\|_H,$$

$$\forall u_1, u_2, v\in H \quad (3.35)$$

及强椭圆条件

$$a(u_1, u_1-u_2)-a(u_2, u_1-u_2) \geqslant M_2\|u_1-u_2\|_H^2,$$

$$\forall u_1, u_2 \in H, \quad (3.36)$$

其中 M_1, M_2 均为常数，$f(v)$是 H 上的连续线性泛函。于是方程(3.34)存在唯一解 $u^*\in H$（对照(3.35)、(3.36)与定理2.12

的条件，这一结论可以认为是非线性情形下的 Lax—Milgram 定理）．

假定 $H_n \subset H$ 为有限维子空间，投影算子 P_n: $H \to H_n$ 是正交的，而且 $P_n \xrightarrow{p} I$，此时

$$a(u, v_n) = f(v_n), \quad \forall v_n \in H_n \tag{3.37}$$

也存在解 $u_n^* \in H_n$，$n \in N$，而且 $u_n^* \to u^*$．

为了证明这一结论的正确性，根据所设可以定义算子 A: $H \to H$ 使

$$a(u, v) = (Au, v), \ \forall v \in H,$$

以及线性算子 K: $H \to H$ 使

$$f(v) = (Kf, v), \ \forall v \in H,$$

从而方程(3.34)便等价于算子方程

$$Au = Kf, \tag{3.38}$$

它的投影方程是

$$P_n A u_n = P_n K f, \ u_n \in H_n. \tag{3.39}$$

根据(3.35)、(3.36)算子 A 满足条件

$$\|Au_1 - Au_2\| \leqslant M_1 \|u_1 - u_2\|_H, \ \forall u_1, u_2 \in H, \tag{3.40}$$

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geqslant M_2 \|u_1 - u_2\|_H^2, \ \forall u_1, u_2 \in H, \tag{3.41}$$

于是由定理3.2，方程(3.38)存在唯一解，而且其投影方程(3.39)也存在唯一解，并有估计式(3.10)．

根据算子 A、K 的定义，不难看出，方程(3.37)与方程(3.39)等价，因此结论正确．

假定 H_n 由基函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 所生成，又令近似解 $u_n =$

$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$. 于是方程(3.37)可以写成

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \varphi_j\right) = f(\varphi_j), \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

例3.2 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{a_{ij}(x)}{a(x, p(u))} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

的广义解，其中 $\Omega \subset R^n$ 为多角形区域， $p(u) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)^{\frac{1}{2}}$. 假定 $(a_{ij}(x))$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是对称正定且连续的，$\dfrac{1}{a(x,\xi)}$ 是一个定义在 $\Omega \times (0, +\infty)$ 上的实值函数，关于 x、ξ 都是连续的. 记

$$p^{(2)}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j},$$

$$p^2(u) = p^2(u, u) = p^{(2)}(u, u).$$

还设

1° $\left(\dfrac{\xi_1}{a(x,\xi_1)} - \dfrac{\xi_2}{a(x,\xi_2)}\right)(\xi_1 - \xi_2) \geqslant c_0(\xi_1 - \xi_2)^2 > 0$

$(\xi_1 \neq \xi_2)$,

2° $0 < \rho \leqslant \dfrac{1}{a(x,\xi)} \leqslant Q < +\infty$,

3° $\left|\dfrac{\xi_1}{a(x,\xi_1)} - \dfrac{\xi_2}{a(x,\xi_2)}\right| \leqslant c_1 |\xi_1 - \xi_2|$,

4° $f(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，

其中 c_0, c_1, ρ, Q 均为常数. 取 $H = \mathring{W}_2^1(\Omega)$，即 $H = H_0^1(\Omega)$，

并定义其内积为 $[u, v] = \int_{\Omega} p^{(2)}(u, v)dx$，相应的范数为

$$\|u\|_1 = \left(\int_{\Omega} p^2(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

显然，这样定义的范数与 $H_0^1(\Omega)$中的范数等价且有关系式

$$p^{(2)}(u+v, u-v) = p^2(u) - p^2(v),$$

$$|p^{(2)}(u, v)| < p(u) \cdot p(v),$$

$$|p(u) - p(v)| \leqslant p(u-v).$$

(3.42)的变分方程是

$$a(u, v) = (f, v), \quad v \in H, \tag{3.43}$$

其中

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{a_{ij}(x)}{a(x, p(u))} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \tag{3.44}$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \tag{3.45}$$

我们可以定义非线性算子 A：$H_0^1 \to H_0^1$，线性算子 K：$L_2 \to H_0^1$ 使

$$[Au, v] = \int_{\Omega} \frac{1}{a(x, p(u))} p^{(2)}(u, v)dx, \tag{3.46}$$

$$[Kf, v] = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \tag{3.47}$$

因此，(3.43)转化为等价的算子方程

$$Au = Kf. \tag{3.48}$$

现在证明算子 A 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足式(3.40)与(3.41)，从而可用定理3.2于本问题．为此目的，设 $u, v\in H_0^1(\Omega)$，先证算子 A 满足(3.41)，记

$$\Omega_1=\left\{x\in\Omega:\ \frac{1}{a(x,p(u))}<\frac{1}{a(x,p(v))}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{x\in\Omega:\ \frac{1}{a(x,p(u))}\geqslant\frac{1}{a(x,p(v))}\right\},$$

$$[A(z),\ w]_{\Omega_i}=\int_{\Omega_i}\frac{1}{a(x,p(z))}\,p^{(2)}(z,\ w)dx,\ i=1,\ 2,$$

于是 $\quad [A(u)-A(v),\ u-v]_{\Omega_1}$

$$=\int_{\Omega_1}\frac{1}{a(x,p(u))}\,p^{(2)}(u,\ u-v)dx$$

$$-\int_{\Omega_1}\frac{1}{a(x,p(v))}\,p^{(2)}(v,\ u-v)dx$$

$$=\int_{\Omega_1}\frac{1}{a(x,p(u))}\,p^2(u-v)dx$$

$$+\int_{\Omega_1}\left(\frac{1}{a(x,p(u))}-\frac{1}{a(x,p(v))}\right)p^{(2)}(v,\ u-v)dx$$

$$=\int_{\Omega_1}\frac{1}{a(x,p(u))}\,p^2(u-v)dx$$

$$+\int_{\Omega_1}\left(\frac{1}{a(x,p(v))}-\frac{1}{a(x,p(u))}\right)p^2(v)dx$$

$$-\int_{\Omega_1}\left(\frac{1}{a(x,p(v))}-\frac{1}{a(x,p(u))}\right)p^{(2)}(v,\ u)dx$$

$$\geqslant\int_{\Omega_1}\frac{1}{a(x,p(u))}\,p^2(u-v)dx$$

$$+\int_{\Omega_1}\left(\frac{1}{a(x,p(v))}-\frac{1}{a(x,p(u))}\right)$$

$$\times p(v)(p(v)-p(u))dx$$

$$=\int_{\Omega_1}\left(\frac{1}{a(x,p(u))}p^2(u-v)-\frac{1}{a(x,p(u))}\right.$$

$$\left.\times(p(u)-p(v))^2\right)dx$$

$$+\int_{\Omega_1}\left(\frac{1}{a(x,p(u))}\,p(u)-\frac{1}{a(x,p(v))}\,p(v)\right)$$

$$\times(p(u)-p(v))dx.$$

同理可证

$$[A(u)-A(v),\ u-v]_{\Omega_2}$$

$$\geqslant\int_{\Omega_2}\left(\frac{1}{a(x,p(v))}\,p^2(u-v)-\frac{1}{a(x,p(v))}\,(p(u)-p(v))^2\right)$$

$$\times\ dx+\int_{\Omega_2}\left(\frac{1}{a(x,p(u))}\,p(u)-\frac{1}{a(x,p(v))}\,p(v)\right)$$

$$\times(p(u)-p(v))dx.$$

由条件2°

$$[A(u)-A(v),\ u-v]=[A(u)-A(v),\ u-v]_{\Omega_1}$$

$$+[A(u)-A(v),\ u-v]_{\Omega_2}$$

$$\geqslant\int_{\Omega}\rho(p^2(u-v)-(p(u)-p(v))^2)dx$$

$$+\int_\Omega\left(\frac{1}{a(x,p(u))}\,p(u)-\frac{1}{a(x,p(v))}\,p(v)\right)$$

$$\times(p(u)-p(v))dx.$$

根据条件1°，上面不等式第一，二项均为非负，所以

$$[A(u)-A(v),u-v]\geqslant\rho\int_\Omega p^2(u-v)dx$$

$$-\rho\int_\Omega(p(u)-p(v))^2dx, \tag{3.49}$$

$$[A(u)-A(v),u-v]$$

$$\geqslant\int_\Omega\left(\frac{p(u)}{a(x,p(u))}-\frac{p(v)}{a(x,p(v))}\right)(p(u)-p(v))dx$$

$$\geqslant c_0\int_\Omega(p(u)-p(v))^2dx. \tag{3.50}$$

上式两端同乘以 ρ/c_0 并与(3.49)相加得

$$[A(u)-A(v),u-v]\geqslant(\rho/c_0+1)^{-1}\rho\int_\Omega p^2(u-v)dx$$

$$\geqslant M_2\|u-v\|_1^2,\ M_2=\rho\Big/\left(1+\frac{\rho}{c_0}\right)>0. \tag{3.51}$$

现在利用2°，3°证明算子 A 满足(3.40)式．因

$$|[A(u)-A(v),z]|$$

$$=\left|\int_\Omega\frac{p^{(2)}(u,z)}{a(x,p(u))}dx-\int_\Omega\frac{p^{(2)}(v,z)}{a(x,p(v))}dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_\Omega\left(\frac{1}{a(x,p(u))}-\frac{1}{a(x,p(v))}\right)p^{(2)}(u,z)dx\right|$$

$$+\left|\int_\Omega \frac{1}{a(x,p(v))}p^2(u-v,z)dx\right|$$

$$\leqslant\left(\int_\Omega\left(\frac{1}{a(x,p(u))}-\frac{1}{a(x,p(v))}\right)^2 p^2(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_\Omega p^2(z)dx\right)^{\frac{1}{2}}+Q\|u-v\|_1\|z\|_1$$

$$=\left(\int_\Omega\left[\frac{p(u)}{a(x,p(v))}-\frac{p(v)}{a(x,p(v))}+\frac{p(v)-p(u)}{a(x,p(v))}\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\|z\|_1+Q\|u-v\|_1\|z\|_1$$

$$\leqslant\left[\int_\Omega\left(\frac{p(u)}{a(x,p(u))}-\frac{p(v)}{a(x,p(v))}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\|z\|_1$$

$$+\left[\int_\Omega\left(\frac{p(v)-p(u)}{a(x,p(v))}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\|z\|_1+Q\|u-v\|_1\|z\|_1$$

$$\leqslant c_1\left[\int_\Omega\left|p^2(u-v)\right|dx\right]^{\frac{1}{2}}\|z\|_1+2Q\|u-v\|_1\|z\|_1$$

$$\leqslant(c_1\|u-v\|_1+2Q\|u-v\|_1)\|z\|_1$$

$$\leqslant M_1\|u-v\|_1\|z\|_1,\ M_1=c_1+2Q>0. \tag{3.52}$$

再令 $z=A(u)-A(v)$，可直接推得算子 A 满足（3.40)式。

如果假定 $H_n\subset H_0^1(\Omega)$是有限维子空间且 $\{H_n\}$ 终归稠密于 $H_0^1(\Omega)$(类同于上一个例子，据此可定义两种内积意义下的投影算子 P_n, P_n^A: $H_0^1(\Omega)\to H_n$ 都是正交且点态收敛的）。那末根据定理3.2得知方程（3.43）及其投影方程 $a(u_n, v_n)=(f, v_n)$, $v_n\in H_n$ 都存在唯一解，而且投影解收敛于(3.43)的解。

3.2 全连续算子方程的投影解

非线性算子 $K: X \to X$ 称为**全连续**，如果 K 是列紧的而且是连续的。

显然，当 K 是线性有界算子时，列紧算子与全连续算子的概念是一致的。

这一节讨论形如

$$\lambda x = \hat{K}x + f,\ \lambda \neq 0 \tag{3.53}$$

的方程的投影解法，其中 $\hat{K}: X \to X$ 全连续，$f \in X$。不难看出，如果定义 $Kx = \lambda^{-1}(\hat{K}x + f)$，那末(3.53)便化为

$$Kx = x, \tag{3.54}$$

因此，求解(3.53)就转化为求 K 的不动点。为简便计，我们直接从(3.54)式出发讨论 K 的不动点及其相应的投影算子的不动点的有关问题.

定理3.3 设K_n、K: $X \to X$, $K_n \xrightarrow{cc} K$ 或 $K_n \xrightarrow{ac} K$; X 上的集合列$\{D_n\}$一致有界且$\{D_n\}^* \subset D \subset X$，记

$$S_n = \{x_n:\ x_n \in D_n,\ K_n x_n = x_n\},$$

$$S = \{x: x \in D,\qquad Kx = x\},$$

则$\{S_n\}d$ 列紧，$\{S_n\}^* \subset S$ 且 $S_n \to S$，又如果$S_n \neq \varnothing$，$\forall n \in N' \subset N$，则 $S \neq \varnothing$。

证 因 $K_n \xrightarrow{ac} K$，故$\{K_n\}$渐近列紧，于是当$\{x_n\}$有界时，$\{K_n x_n\}d$-列紧，所以集合列$\{S_n\}$也是 d-列紧，又因 $K_n \xrightarrow{c} K$，

故任取 $x_n\in S_n$ 且 $x_n\to x\in X$ 时，$K_nx_n\to Kx$，$Kx=x$。由于 $\{S_n\}^*\subset\{D_n\}^*\subset D$，因此，$x\in D$，得 $x\in S$。于是$\{S_n\}^*\subset S$，利用定理1.1知 $S_n\to S$。

假设 $S_n\neq\varnothing$，$\forall n\in N'$。因为 $S_n\to S$，因此 $S\neq\varnothing$，定理得证。

现在转到讨论(3.54)的投影解，首先我们指出，如果 $P_n\xrightarrow{p}I$，K：$X\to X$，则

$$P_nK\xrightarrow{c}K\Longleftrightarrow K\text{ 是连续的。}\tag{3.55}$$

事实上，如果 K 连续，则 $x_n\to x$ 推得 $Kx_n\to Kx$，因 $P_n\xrightarrow{p}I$，从而 $P_nKx_n\xrightarrow{c}Kx$。反之，如果有 $P_nK\xrightarrow{c}K$，则由定理1.5，$P_nK\xrightarrow{p}K$ 且$\{P_nK\}$渐近连续。利用不等式

$$\begin{aligned}\|Kx-Kx_0\|\leqslant&\|Kx-P_nKx\|+\|P_nKx-P_nKx_0\|\\&+\|P_nKx_0-Kx_0\|,\end{aligned}$$

当 $x\to x_0(n\to\infty)$，推得 $Kx\to Kx_0$，定理得证。

重复第二章(2.159)一样的推理，有

$$P_n\xrightarrow{p}I,\ K\text{ 列紧}\Longrightarrow\{P_nK\}\text{ 族列紧。}\tag{3.56}$$

显然，如果 K 为连续，则对于任何 $n\in N$，P_nK 也连续，因此，由式(3.55)，(3.56)得

$$P_n\xrightarrow{p}I,\ K\text{ 全连续}\Longrightarrow P_nK\xrightarrow{cc}K,\tag{3.57}$$

因而有 $P_nK\xrightarrow{ac}K$，于是有下面的定理。

定理3.4 设 K：$X\to X$ 全连续，$P_n\xrightarrow{p}I$，若记

$$S=\{x\in X:\ Kx=x,\ \|x\|\leqslant r\},$$

$$S_n=\{x_n\in X_n:\ P_nKx_n=x_n,\ \|x_n\|\leqslant r\},$$

其中 r 为某一常数，则 $\{S_n\}$ d · 列紧且 $S_n\to S$。又若 $S_n\neq\varnothing$，$\forall n\in N'\subset N$，则 $S\neq\varnothing$。

定理3.4说明了当 n 充分大以后，算子 P_nK 在 X_n 上有不动点时，K 在 X 上也有不动点，而且 P_nK 的不动点集合收敛于 K 的不动点集合。

下面讨论在什么情况下，算子 P_nK 存在不动点。

设 $r>0$ 为某一常数，记

$$B_r=\{x:\ x\in X,\ \|x\|\leqslant r\},$$

$$\partial B_r=\{x:\ x\in X,\ \|x\|=r\},$$

称条件 H_1、H_2，H_{1n}、H_{2n} 分别为

H_1：$\|Kx\|<\|x\|,\ x\in\partial B_r$，

H_2：$Kx=\lambda x,\ \lambda>0,\ x\in\partial B_r\Longrightarrow\lambda<1$，

H_{1n}：$\|P_nKx_n\|<\|x_n\|,\ x_n\in\partial B_r\cap X_n$，

H_{2n}：$P_nKx_n=\lambda x_n,\ \lambda>0,\ x_n\in\partial B_r\cap X_n\Longrightarrow\lambda<1$.

显然

$$H_1\Longrightarrow H_2,\ H_{1n}\Longrightarrow H_{2n}. \tag{3.58}$$

正如前面已经指出，如果 P_n 是适当的函数空间 X 上的分片线性插值投影或是 Hilbert 空间上的正交投影，则$\|P_n\|\leqslant 1$，且

$$\|P_n\|\leqslant 1,H_1\Longrightarrow H_{1n}\Longrightarrow H_{2n}. \tag{3.59}$$

引理3.1 设 K 是连续的并且 H_{1n} 或 H_{2n} 成立，则存在 x_n 使得

$$P_nKx_n=x_n,\ x_n\in X_n,\ \|x_n\|<r. \tag{3.60}$$

证 引入收缩算子

$$Rx=\begin{cases} x, & \|x\|\leqslant r \\ \dfrac{rx}{\|x\|}, & \|x\|\geqslant r \end{cases}, \quad u\in X_n \tag{3.61}$$

并定义算子 T：$X_n\to X_n$ 为

$$Tx=RP_nKx,\ x\in X_n. \tag{3.62}$$

由于 P_nK、$n\in N$ 在 X_n 上连续，因此 T 也是连续的且映 $B_r\cap X_n$ 于 $B_r\cap X_n$，利用 Brouwer 不动点定理，存在 $x_n\in B_r\cap X_n$，$Tx_n=x_n$。因此

$$RP_nKx_n=x_n,\ x_n\in B_r\cap X_n. \tag{3.63}$$

假如 $\|P_nKx_n\|\geqslant r$，则由式(3.61)及(3.63)得

$$P_nKx_n=\frac{\|P_nKx_n\|}{r}x_n,\ \|x_n\|=r,$$

这与条件 H_{1n}、H_{2n} 矛盾，故 $\|P_nKx_n\|<r$。再次利用式(3.61)，由(3.63)推出(3.60)成立。

引理3.2 假设 K：$X\to X$ 是全连续算子，$P_n\xrightarrow{p}I$，又假定 H_1 或 H_2 成立，则 H_{2n} 当 n 充分大以后成立。

证 如果引理不真，则存在 x_n 和 λ_n，$n\in N'\subset N$ 使得

$$P_nKx_n=\lambda_nx_n,\ x_n\in\partial B_r\cap X_n,\ \lambda_n\geqslant 1. \tag{3.64}$$

因为 P_n 和 K 均为有界算子，即映有界集为有界集，因此存在常数 c，$\|P_nKx_n\|\leqslant c$，从而

$$1\leqslant\lambda_n\leqslant\frac{c}{r},\ n\in N'$$

推得存在 $N''\subset N'$ 以及 λ 使得 $\lambda_n\to\lambda, n\in N''$，并且 $\lambda\geq 1$.

又因为 $P_n\xrightarrow{p}I$，K 是列紧的，故存在 $y\in X$ 及 $N'''\subset N''$ 使得 $x_n\in\partial B_r\cap X_n$，$P_nKx_n\to y(n\in N''')$，再由(3.64)知，当 $\lambda_n\to\lambda\geq 1$ 时($n\in N'''$)存在 $x=\frac{y}{\lambda}$，$x_n\to x$ 并且因为 K 是连续的便有

$$Kx=\lambda x,\ \lambda\geq 1,\ x\in\partial B_r,$$

这与条件 H_1、H_2 矛盾，因而引理成立.

利用引理3.1，引理3.2及定理3.4便有

定理3.5 设K: $X\to X$ 全连续，$P_n\xrightarrow{p}I$；条件 H_1 或 H_2 成立并记

$$S=\{x:\ x\in X,\ Kx=x,\ \|x\|\leq r\},$$

$$S_n=\{x_n:\ x_n\in X_n,\ P_nKx_n=x_n,\ \|x_n\|\leq r\},$$

则当 n 充分大以后，$S_n\neq\varnothing$ 且 $S_n\to S$，$S\neq\varnothing$.

定理3.5反映了在适当的条件下，可以保证近似算子 P_nK 的不动点存在，其聚点（按集合收敛意义下）便是原算子 K 的不动点；然而定理3.5（或与之相应的定理3.4、3.3）并不能断定 K 的任何不动点一定是 P_nK(或 K_n) 的不动点的聚点。如果我们再附加一些条件，并应用算子旋转量的概念，就可以使上述问题得到肯定性的回答。为此目的，我们在下面不加证明地叙述一些有关旋转量的性质（详细地论述将会偏离本讲义的目的）[16].

设 Ω 为实 Banach 空间 X 上的非空有界开集，Γ 为其边界，K: $\overline{\Omega}\to X$ 是全连续算子，则称

$$\Phi(x)=x-Kx \tag{3.65}$$

为 $\overline{\Omega}$ 上的**全连续向量场**.

每一个在边界 Γ 上无零点的全连续向量场 $\Phi(x)$ 均存在一个与它相对应的整数，并称之为向量场 $\Phi(x)$ 在 Γ 上的**转旋量**. 旋转量可能是正整数，也可能是负整数或零，并记之为 $\gamma(\Gamma)$ 或 $\gamma(I-K, \Gamma)$.

性质1 设 $\Omega\subset X$ 为有界凸集，算子 $K: \overline{\Omega}\to X$ 全连续，$K(\Gamma)\subset\overline{\Omega}$ 且 K 在 Γ 上没有不动点，则 $\gamma(I-K, \Gamma)=1$，类似地，如果 X 是 Hilbert 空间，Ω 为以 0 为心的球并满足条件 $(Kx, x)<(x, x)$，$x\in\Gamma$，则 $\gamma(I-K, \Gamma)=1$.

性质2 如果 $\Phi(x)$ 在 Γ 上无零点，而且 $\Phi(x)$ 的旋转量 $\gamma(I-K, \Gamma)\neq 0$，则 K 在 Ω 内至少有一个不动点.

算子 $K(t, x)$: $[0, 1]\times\Gamma\to X$ 称之为全连续的，如果它的值域在 X 中列紧而且关于 (t, x) 连续. 两个在 $\overline{\Omega}$ 上的全连续向量场 $x-Kx$ 和 $x-K_1x$ 称为在 Γ 上**同伦**，如果存在全连续算子 $K(t, x)$，使得 $K(t, x)\neq x$，$\forall t\in[0, 1]$，$x\in\Gamma$，而且 $K(0, x)\equiv Kx$，$K(1, x)\equiv K_1x$，$\forall x\in\Gamma$.

性质3 在 Γ 上同伦的全连续向量场有相同的旋转量；特别，若 T、K 为 $\overline{\Omega}$ 上的全连续算子，K 在 Γ 上没有不动点，并且

$$\sup_{x\in\Gamma}\|Tx\|<\inf_{x\in\Gamma}\|x-Kx\|,$$

则 $\gamma(I-K, \Gamma)=\gamma(I-K-T, \Gamma)$.

性质4 如果 x_0 是 K 在 Ω 上的孤立不动点，则在以 x_0 为中心的任意充分小的球面上，其旋转量为常数，并称这个常数为**不动点指数**. 如果 K 在 Ω 上的所有不动点都是孤立的，而且在 Γ 上没有不动点，则在 Ω 上的不动点个数是有限的（记为 x_1, x_2, $\cdots$, x_r）而且 $\Phi(x)$ 在 Γ 上的旋转量等于 x_1, x_2, $\cdots$, x_r 上的不动点指数之和.

性质5 如果 x_1 是 K 在 Ω 上的不动点，而且全连续算子

K 在 x_0 点有 Fréchet 导数 $K'(x_0)$。设线性算子 $I-K'(x_0)$ 是可逆的(即 1 不是 $K'(x_0)$的特征值，见(4.1))，则 x_0 是孤立不动点而且其指数非零(具体说来，其指数等于$(-1)^{\beta}$，β 为$K'(x_0)$的大于1的特征值的重数和)。

定理3.6 设 K：$B\subset X\to X$ 为全连续算子，$P_n\xrightarrow{p}I$；其中 B 为有界闭集。$Kx\neq x$，$\forall x\in\partial B$，$\gamma(I-K,\partial B)\neq 0$，记

$$S=\{x:\ Kx=x,\ x\in B\},$$

$$S_n=\{x_n:\ P_nKx_n=x_n,\ x_n\in B\cap X_n\},$$

则 $S\neq\varnothing$，而且存在 n_0 使 $n\geqslant n_0$ 时 $S_n\neq\varnothing$，$S_n\to S$，$n\to\infty$。

证 根据性质 2，$S\neq\varnothing$。又因 $P_n\xrightarrow{p}I$，所以

$$\sup_{x\in\partial B}\|P_nKx-Kx\|\to 0. \tag{3.66}$$

记 $a=\inf\limits_{x\in\partial B}\|x-Kx\|$。显然 $a>0$，如不然，存在 $x_n\in\partial B$，$n\in N$ 使得 $x_n-Kx_n\to 0$，$n\to\infty$。因 K 为列紧，故可以认为 $Kx_n\to z$，$z\in\partial B$。同样 z 也是 x_n 的极限，即 $z=Kz$，$z\in\partial B$。此与假设矛盾。

设 $\sup\limits_{x\in\partial B}\|P_nKx-Kx\|\leqslant\dfrac{a}{2}$，$n\geqslant n_0$，于是当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\inf_{x\in\partial B}\|x-Kx\|>\sup_{x\in\partial B}\|P_nKx-Kx\|$$

因

$$\inf_{x\in\partial B}\|x-P_nKx\|\geqslant\inf_{x\in\partial B}\|x-Kx\|-\sup_{x\in\partial B}\|P_nKx-Kx\|$$

$$\geqslant\frac{a}{2}>0.$$

利用性质 3 得 $\gamma(I-K,\partial B)=\gamma(I-P_nK,\partial B)\neq 0$，由性质2得知当 $n\geqslant n_0$ 时，方程 $P_nKx=x$ 在B 内有解 $x_n\in B$。又因$P_nKx_n\in$

X_n，故 $x_n\in B\cap X_n$，即 $S_n\neq\varnothing$，再利用定理3.4，$S_n\to S$。

特别，若 K 的不动点是唯一的，它必为近似不动点的极限。类似的结论，对于孤立不动点的情况也适合。

现在转向讨论当算子 K 有孤立不动点时，其近似算子 P_nK 的不动点的局部唯一性及相应的误差估计。基本结论为定理3.7，下面先证明两个引理。

引理3.3 设 $K: X\to X$ 全连续，$P_n\xrightarrow{p}I$，x_0 是 K 的孤立不动点，此外又设 x_0 有非零不动点指数，则对任一充分小的 r_0，存在 $N(r_0)$，使得 $n\geqslant N(r_0)$ 时，算子 P_nK 在 $X_n\cap B(x_0, r_0)$ 内至少有一个不动点。

证 假定在

$$B(x_0, r_0)=\{x:\ x\in X,\ \|x-x_0\|\leqslant r_0\}$$

内除 x_0 外算子 K 再没有别的不动点，由于 $P_nK\xrightarrow{cc}K$，因此由定理3.3，对于每一个 $r(0<r\leqslant r_0)$，存在 $N(r)$，使得 $n\geqslant N(r)$ 时，P_nK 在集合

$$D(x_0, r, r_0)=\{x:\ x\in X,\ r\leqslant\|x-x_0\|\leqslant r_0\}$$

没有任何不动点，与定理3.6证法一样，可证得 $I-P_nK$ 与 $I-K$ 在 $B(x_0, r)$ 的球面上有相同的旋转量，因而在球

$$B(x_0, r)=\{x:\ x\in X,\ \|x-x_0\|\leqslant r\}$$

中至少存在一个不动点 $x_n=P_nKx_n$，$x_n\in X_n\cap B(x_0, r)$，特别当取 $r=r_0$ 时推得当 $n\geqslant n_0$ 时 P_nK 在 $X_n\cap B(x_0, r_0)$ 也存在不动点，故引理成立。

引理3.4 如果 K 是 X 上的列紧算子，而且在 x_0 处的 Fréchet 导数 $K'(x_0)$ 存在，则 $K'(x_0)$ 也是列紧的。

证 根据 Fréchet 导数的定义（见附录），知 $K'(x_0)\in L(X)$。

$$K(x_0+h)-K(x_0)=K'(x_0)h+\omega(x_0, h), \tag{3.67}$$

其中

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|}=0, h\in X. \tag{3.68}$$

记 B 为一单位球，如果 $K'(x_0)$不是列紧的，则 $\overline{K'(x_0)B}$ 不列紧，于是可以找到 $\delta>0$ 及一列元素 $h_i\in B, i\in N$，使得

$$\|K'(x_0)(h_i-h_j)\|>\delta, i\neq j,\ i, j\in N.$$

由(3.67)式，存在 $\rho>0$，$\|h\|<\rho$，

$$\|K(x_0+h)-K(x_0)-K'(x_0)h\|<\frac{\delta}{3}\|h\|,$$

从而

$$\begin{aligned}&\|K(x_0+\rho h_i)-K(x_0+\rho h_j)\|\\ &\geqslant\rho\|K'(x_0)h_i-K'(x_0)h_j\|\\ &\quad-\|K(x_0+\rho h_i)-K(x_0)-\rho K'(x_0)h_i\|\\ &\quad-\|K(x_0+\rho h_j)-K(x_0)-\rho K'(x_0)h_j\|\\ &\geqslant\frac{\rho\delta}{3}>0,\quad i\neq j,\ i, j\in N.\end{aligned}$$

这样，$\{K(x_0+\rho h_i)\}$，$i\in N$ 不可能有收敛子列，因此 K 不是列紧算子，这一矛盾导致引理成立。

定理3.7 设 K：$X\to X$ 全连续，$P_n\xrightarrow{p}I$ 且

$$\|K''(x)\|\leqslant M(x_0, r),\ x\in B(x_0, r), \tag{3.69}$$

其中 $B(x_0, r)$是以 x_0 为中心，r 为半径的球，$M(x_0, r)$为与 x_0 及 r 有关的某一常数。又设 x_0 为 K 的不动点，并且 $I-K'(x_0)$ 的逆存在，则 x_0 是 K 的孤立不动点且指数非零。此外，存在

$0<\varepsilon\leqslant r$ 和 $n_0=n_0(\varepsilon)>0$，使得当 $n\geqslant n_0$，P_nK 在 $X_n\cap B(x_0,\varepsilon)$ 中存在唯一的不动点 x_n，而且存在 β 使得

$$\|x_0-x_n\|\leqslant\beta\|P_nx_0-x_0\|. \tag{3.70}$$

证 根据所列的旋转量的性质以及假设条件，x_0 为孤立不动点且有非零指数，又由引理3.4，$K'(x_0)\in L(X)$ 是列紧算子，因而由(3.57)式 $P_nK'(x_0)\xrightarrow{cc}K'(x_0)$. 根据假设 $[I-K'(x_0)]^{-1}$ 存在而且有界，从而由定理2.5知，当 n 充分大以后，$[I-P_nK'(x_0)]^{-1}\in L(X)$，且 $\|[I-P_nK'(x_0)]^{-1}\|\leqslant c$，$n\geqslant n_0$，其中 c 为常数. 又由(3.69)式，对于 $0<\varepsilon\leqslant r$，

$$\|P_nK'(x_0)-P_nK'(x)\|\leqslant\|P_n\|\|K'(x_0)-K'(x)\|$$
$$\leqslant\delta M(x_0,\varepsilon)\varepsilon,\ n\in N,\ x\in B(x_0,\varepsilon),$$

其中 $\|P_n\|\leqslant\delta$. 取 ε 足够小，使

$$\delta M(x_0,\varepsilon)\varepsilon<\frac{1}{2c}, \tag{3.71}$$

则对所有 $x\in B(x_0,\varepsilon)$，$n\geqslant n_0$，

$$\|P_nK'(x_0)-P_nK'(x)\|<\frac{1}{2\|(I-P_nK'(x_0))^{-1}\|}.$$

由定理2.2知，此时 $(I-P_nK'(x))^{-1}$ 存在，而且

$$\|(I-P_nK'(x))^{-1}\|<2c,\quad n\geqslant n_0,\quad x\in B(x_0,\varepsilon). \tag{3.72}$$

另一方面，由于 x_0 是 K 的孤立不动点，而且有非零指数，从而由引理3.3，当 n 充分大以后（例如 $n\geqslant n_1\geqslant n_0$），$P_nK$ 在 $X_n\cap B(x_0,\varepsilon)$ 中至少存在一个不动点 x_n. 对于 $x\in B(x_0,\varepsilon)$ 和 $n\geqslant n_1$，

$$x-P_nKx=[I-P_nK'(x_n)](x-x_n)$$

$$-[P_nK(x)-P_nK(x_n)-P_nK'(x_n)(x-x_n)],$$

利用 Fréchet 导数的一般估计式，对$x\in B(x_0, \varepsilon)$,

$$\|P_nK(x)-P_nK(x_n)-P_nK'(x_n)(x-x_n)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|x-x_n\|^2\cdot\delta M(x_0, \varepsilon).$$

由式(3.72)有

$$\|x-P_nKx\|\geqslant\left[\frac{1}{2c}-\varepsilon\delta M(x_0, \varepsilon)\right]\|x-x_n\|,$$

$$n\geqslant n_1, \quad x\in B(x_0, \varepsilon).$$

由式(3.71)得知 P_nK 在 $X_n\cap B(x_0, \varepsilon)$中的不动点是唯一的.

现在证明估计式(3.70). 由于 $x_n=P_nKx_n$, $x_0=Kx_0$, 故

$$[I-P_nK'(x_0)](x_0-x_n)=K(x_0)-P_nK(x_0)$$

$$-[P_nK(x_n)-P_nK(x_0)-P_nK'(x_0)(x_n-x_0)].$$

上式两边乘以$[I-P_nK'(x_0)]^{-1}$, 则当 $n\geqslant n_1$ 时

$$\|x_0-x_n\|\leqslant c\{\|K(x_0)-P_nK(x_0)\|$$

$$+\frac{\delta}{2}M(x_0, \varepsilon)\|x_0-x_n\|^2\},$$

$$\|x_0-x_n\|\leqslant\frac{c\|K(x_0)-P_nK(x_0)\|}{1-[c\delta M(x_0,\varepsilon)/2]\|x_0-x_n\|},$$

这里 c, δ, M 都是常数. 由式(3.71)知 $c\delta M(x_0, \varepsilon)\|x_0-x_n\|\leqslant c\delta M(x_0, \varepsilon)\varepsilon<\frac{1}{2}$. 故有

$$\|x_0-x_n\|\leqslant\frac{4}{3}c\|K(x_0)-P_nK(x_0)\|$$

$$\leqslant\frac{4}{3}c\|x_0-P_nx_0\|, \quad n\geqslant n_1.$$

取 $\beta=\frac{4}{3}c$，即知式(3.70)成立。

当算子的可微性要求降低时，我们可以证明下面的结果。

定理 3.8 设 $K: X\to X$ 全连续，$P_n \xrightarrow{p} I$，且满足条件 H_1 或 H_2，则方程 $Kx=x$ 及 $P_nKx_n=x_n$ 当 $n\geqslant n_0$（n_0 为某一正整数）于球 B_r 内均存在解（分别记之为 $x_0\in B_r$，$x_n\in B_r\cap X_n$）。若 x_0 是 $Kx=x$ 在 B_r 内的唯一解，则任何解序列$\{x_n\}$均收敛于 x_0。当 K 在 x_0 处有 Fréchet 导数 $K'(x_0)$且算子$(I-K'(x_0))$可逆时，有误差估计式

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\frac{c\|P_nx_0-x_0\|}{1-cM\theta_n}, \tag{3.73}$$

其中 c、M 为常数，$\theta_n\to 0\ (n\to\infty)$。

证 定理的前半部可由定理3.5推得，因此只需证明估计式(3.73)。

由于线性算子$I-K'(x_0)$可逆，$K'(x_0)$又是全连续线性算子，因此存在有界的$(I-K'(x_0))^{-1}\in L(X)$，从而由定理2.5，当n充分大以后存在有界的$(I-P_nK'(x_0))^{-1}\in L(X)$，而且

$$\|(I-P_nK'(x_0))^{-1}\|\leqslant c, \quad n\geqslant n_0, \tag{3.74}$$

其中 c、n_0 均为常数。

由定理的前半部，设 $x_0=Kx_0$，$P_nKx_n=x_n$，则 $x_n\to x_0(n\to\infty)$。由 $K'(x_0)$的存在性，有

$$\begin{aligned}Kx_n=K(x_0+(x_n-x_0))&=Kx_0+K'(x_0)(x_n-x_0)\\&\quad+\omega(x_0,x_n-x_0),\end{aligned}$$

其中 $\omega(x_0,x_n-x_0)=o(\|x_n-x_0\|)$，即

$$\theta_n\equiv\frac{\|\omega(x_0,x_n-x_0)\|}{\|x_n-x_0\|}$$

$$= \frac{\|Kx_n - Kx_0 - K'(x_0)(x_n - x_0)\|}{\|x_n - x_0\|} \longrightarrow 0. \quad (n\to\infty)$$

(3.75)

因此 $x_n - x_0 = P_nKx_n - Kx_0$

$$= P_nKx_0 - Kx_0 + P_nK'(x_0)(x_n - x_0)$$

$$+ P_n\omega(x_0, x_n - x_0),$$

$$[I - P_nK'(x_0)](x_n - x_0) = P_nx_0 - x_0 + P_n\omega(x_0, x_n - x_0).$$

设 $\|P_n\| \leqslant M$，利用式(3.74)得

$$\|x_n - x_0\| \leqslant c\,\|P_nx_0 - x_0\| + cM\|\omega(x_0, x_n - x_0)\|$$

$$\leqslant c\,\|P_nx_0 - x_0\| + cM\theta_n\|x_n - x_0\|,$$

故 $\|x_n - x_0\| \leqslant \dfrac{c\|P_nx_0 - x_0\|}{1 - cM\theta_n}$.

例3.3 考虑积分方程

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s))ds + g(t), \qquad (3.76)$$

其中 $k(t, s, u)$是$[0, 1]\times[0, 1]\times(-\infty, +\infty)$上的连续函数，而且 $|k(t, s, u)| \leqslant \delta + \beta|u|^\alpha$，$\alpha < 1$，其中 δ、α、β 均为常数。因此 Урысон 算子 K：

$$Ku(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s))ds \qquad (3.77)$$

是映 $C[0, 1]$ 于自身的连续的列紧算子，即全连续算子。又设 $g(t) \in C[0, 1]$，记 $Tu = Ku + g$，于是式(3.76)又可写为算子形式 $u = Tu$。显然，T：$C[0, 1] \to C[0, 1]$全连续，而且

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = 0,$$

从而存在 $r>0$，使

$$\|Tu\|<\|u\|, \quad \|u\|=r, \tag{3.78}$$

这样的算子 T 满足条件 H_1.

取 $X=C[0,1]$，式(2.24)中的 $e_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$ 为基函数($a=0$，$b=1$)生成 子空 间 $X_n=[e_1(t), e_2(t), \cdots, e_n(t)]\subset C[0,1]$。显然，$e_i(t_j)=\delta_{ij}$，$1\leqslant i, j\leqslant n$，其中 $0=t_1<t_2<\cdots<t_n=1$ 分$[0,1]$为 $n-1$等分. 对任一个 $x\in X$，它在 X_n 上的投影定义为

$$P_n x=\sum_{j=1}^{n} x(t_j)e_j(t), \tag{3.79}$$

显然，投影算子 P_n: $X\to X_n$ 就是分片线性插值投影，这时式(3.76)的投影方程的算子形式是

$$u_n=P_nTu_n, \quad u_n\in X_n$$

而其积分形式是

$$u_n(t)=\int_0^1 P_n k(t, s, u_n(s))ds+P_n g, \tag{3.80}$$

其中 $P_n k(t, s, u(s))$是以 t 为变量的 分片线性插值投影，$u_n(t)$ 为 $e_i(t)$, $i=1, 2, \cdots, n$ 的线性组合，$P_n g$ 由式(3.79)给出. 根据(3.78)及(3.59)，算子 T 满足条件 H_1，H_{1n}、H_{2n}. 应用定理3.5，方程(3.80)当 n 充分大以后存在解而且其解的极限即为(3.76)的解.

事实上 投影方程(3.80)是一个非线性 代数方程组，因为若设

$$u_n(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i e_i(t) \tag{3.81}$$

为(3.80)的解时，由(3.81)及(3.79)，方程(3.80)便化为非线性代数方程组:

$$c_i - k_i(c_1, c_2, \cdots, c_n) = g(t_i),\ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.82}$$

其中 $k_i(c_1, c_2, \cdots, c_n) = Ku_n(t_i)$。由(3.82)解出 c_i，代入(3.81)便得到近似解 $u_n(t)$。这里 $Ku_n(t)$实际上是一个积分，即

$$Ku_n(t_i) = \int_0^1 k(t_i, s, u_n(s))ds,$$

一般说来是难于用分析形式算出的，因而不得不求助于数值积分。在实际计算中，采用分片插值函数以代替被积函数来构造求积公式也是数值计算中常用的方法之一。就本例情形，可以用

$$I_n(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x(t_j) \tag{3.83}$$

作为积分

$$I(x) = \int_0^1 x(t)dt,\ \ x(t) \in C[0, 1] \tag{3.84}$$

的近似公式，其中

$$w_j = \int_0^1 e_j(t)dt,\ \ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.85}$$

$e_j(t)$为 X_n 上的基函数。因为$\{X_n\}$终归稠于 X，所以由定理1.2推得 $\forall x \in C[0, 1]$，有 $I_n(x) \to I(x)$。因此，若令积分插值点 $s_j = t_j$ 时，便有

$$\begin{aligned} Ku_n(t_i) &\doteq \sum_{j=1}^{n} w_j k(t_i, s_j, u_n(s_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_j k\left(t_i, s_j, \sum_{l=1}^{n} c_l e_l(s_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_j k(t_i, s_j, c_j). \end{aligned} \tag{3.86}$$

此时，式(3.80)或(3.82)便转化为

$$c_i - \sum_{j=1}^{n} w_j k(t_i, s_j, c_j) = g(t_i),\ \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.87}$$

从(3.87)解出 c_i 代入(3.81)便得近似解。

值得指出，由于采用了近似积分公式代替 $Ku_n(t_i)$，所以(3.87)实际上是扰动了的投影方程，即(3.87)是由方程

$$u_n(t)=P_nTu_n(t)+S_nu_n(t) \tag{3.88}$$

取 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的值所建立的非线性代数方程组，其中

$$S_nu=P_n\left(\sum_{j=1}^{n}w_jk(t,s_j,u(s_j))-\int_0^1k(t,s,u(s))ds\right).$$

因 $S_n\xrightarrow{p}0$，又由 K 是一个列紧算子，因此从例1.15得知，

$\{S_n\}$ 是族列紧的且 $S_n\xrightarrow{cc}0$。基于这一分析，不难证明当 n 充分大以后，(3.88)也有解，而且它的解 $u_n(t)$ 也收敛于(3.76)的解。

事实上，当取 n 充分大，向量场

$$\Phi_{u_0}(u)=u-P_nTu,\qquad \Phi_{u_1}(u)=u-P_nTu-S_nu$$

在球面 $\partial B_r\cap X_n$ 上同伦，其中 r 为式(3.78)所示的半径。为此，只须证明

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda,x)&=(1-\lambda)P_nTu+\lambda(P_nTu+S_nu)\\&=P_nTu+\lambda S_nu,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant1\end{aligned}$$

在 $[0,1]\times(\partial B_r\cap X_n)$ 上满足 $\Phi(\lambda,x)\neq x$。如不然，存在 $(\lambda_0,x_0)\in[0,1]\times(\partial B_r\cap X_n)$，使 $\Phi(\lambda_0,x_0)=x_0$，于是

$$\begin{aligned}0&=\|x_0-P_nTx_0-\lambda_0S_nx_0\|\\&\geqslant\|x_0-P_nTx_0\|-\lambda_0\|S_nx_0\|.\end{aligned} \tag{3.89}$$

由于 T 满足条件 H_1（见(3.78)）、H_{1n}、H_{2n}（见(3.59)），因此 $\|x_0-P_nTx_0\|>q>0$，从而由式(3.89)得

$$\|S_n x_0\| > q/\lambda_0 > 0 \quad (\lambda_0 \neq 0).$$

由于 $S_n x_0 \to 0$，所以当 n 足够大时与上式矛盾，这一矛盾推得 $\Phi_{u_0}(u)$ 与 $\Phi_{u_1}(u)$ 当 n 充分大时在球面 $\partial B_r \cap X_n$ 上同伦．由§3.2中性质1～性质3知式(3.88)是可解的．

根据前面分析，$S_n \xrightarrow{cc} 0$，又由式(3.57)知 $P_n T + S_n \xrightarrow{cc} T$，从而由定理3.3知收敛性结果也是成立的．

3.3 连续正规算子方程的投影解

本节我们将讨论形为

$$Ax = y \tag{3.90}$$

的算子方程的投影解，其中 $A: X \to Y$ 是连续且正规的算子．与上节的方式一样，在讨论投影解之前，我们先给出一个一般性的收敛性定理．

设 A、A_n: $X \to Y$，y、$y_n \in Y$，$X_n \subset X$．

引理3.5 若 $A_n \xrightarrow{r} A$（离散地），则

$$\{x_n\}\text{有界，} x_n \in X_n,\ A_n x_n \longrightarrow y$$

$$\Longrightarrow \{x_n\}^* \neq \varnothing \text{ 且 } Ax = y,\quad \forall x \in \{x_n\}^*.$$

证 因为$\{A_n\}$是离散的渐近正规，故若$\{x_n\}$有界，$x_n \in X_n$且 $A_n x_n \to y$，则知$\{x_n\}^* \neq \varnothing$，得引理第一部分的结论．假设 $x \in \{x_n\}^*$，则存在子列$\{x_n\}$，$n \in N' \subset N$，$x_n \to x$．因为 $A_n \xrightarrow{c} A$，从而 $A_n x_n \to Ax$，$n \in N'$（$n \to \infty$），由极限的唯一性知 $Ax = y$．

定理3.9 如果 $A_n \xrightarrow{r} A$（离散地），B、$B_n \subset X$，$\cup B_n$

有界，$\{B_n\}^* \subset B$ 且 $y_n \to y$，记

$$S = \{x;\ x \in B,\ Ax = y\},$$

$$S_n = \{x_n;\ x_n \in B_n,\ x_n \in X_n,\ A_n x_n = y_n\},$$

则$\{S_n\}$ d-列紧，$\{S_n\}^* \subset S$ 且 $S_n \to S$。如果 $S_n \neq \varnothing$（当 $n \in N' \subset N$），则 $S \neq \varnothing$。

特别情形，可取 $B_n = B$，$y_n = y$。

证 因为 $\cup B_n$ 是有界的，因此 $\cup S_n$ 也有界，由引理3.5推得$\{S_n\}$ d-列紧。因为$\{B_n\}^* \subset B$，由引理3.5，$\forall x \in \{S_n\}^*$得 $x \in S$，即$\{S_n\}^* \subset S$。

由定理1.1知 $S_n \to S$。又由式(1.9)可以证明定理后一部分。

一般说来，正规算子 A 的算子投影列并不一定正规收敛于 A，因此，本节我们将要讨论一些特殊的正规算子方程的投影解，例如单调算子、具有列紧扰动的单调算子以及具有列紧扰动的压缩算子，附加不多的条件后这些算子的投影算子列具有正规收敛于原算子的性质。

3.3.1 单调算子方程

假定 X 是自反实 Banach 空间，因而 $X = X^{**}$，又投影算子 P_n: $X \to X_n$ 满足 $P_n \xrightarrow{p} I$，而 $\dim X_n < +\infty$，P_n 的共轭投影算子 P_n^* 由

$$\langle P_n^* y, x\rangle = \langle y, P_n x\rangle,\ x \in X,\ y \in X^* \tag{3.91}$$

所定义。因为$\|P_n^*\| = \|P_n\|$，因此由$P_n \xrightarrow{p} I$ 推得 $\{P_n^*\}$ 一致有界。

如果 X 上的投影算子 P_n: $X \to X_n$ 满足关系：

$$R(P_n) \subset R(P_{n-1}),\qquad N(P_n) \supset N(P_{n+1}) \tag{3.92}$$

（例如 X 是具有可数基的自反 Banach 空间），那末 $P_n^* \xrightarrow{p} I^*$ 的结论可以由 $P_n \xrightarrow{p} I$ 推得. 为了说明这点，我们注意，由式(3.92)可推得

$$\overline{\bigcup_n X_n} = \overline{\bigcup_n R(P_n)} = X, \quad \bigcap_n N(P_n) = 0. \tag{3.93}$$

对任一集合 $S \subset X$ 定义 $S^\perp \subset X^*$:

$$S^\perp = \{y \in X^*;\ \langle y, x\rangle = 0,\ x \in S\}. \tag{3.94}$$

显然，$\overline{S} = X$ 的充要条件是 $S^\perp = 0^*$. 类似地，如果 $S \subset X^*$，也可以定义 $S^\perp$，由于 $X = X^{**}$，所以 $\overline{S} = X^*$ 的充要条件是 $S^\perp = 0$. 又根据式(3.91)及(3.92)得

$$R(P_n^*) = N(P_n)^\perp, \quad N(P_n^*) = R(P_n)^\perp, \tag{3.95}$$

$$\dim R(P_n^*) < +\infty,\ R(P_n^*) \subset R(P_{n+1}^*),$$
$$N(P_n^*) \supset N(P_{n+1}^*), \tag{3.96}$$

$$\overline{\bigcup_n R(P_n^*)} = X^*, \quad \bigcap_n N(P_n^*) = 0^*, \tag{3.97}$$

于是当 $y \in R(P_m^*)(n \geqslant m)$ 时，$P_n^* y = P_n^* y = y$，从而

$$P_n^* y \to y, \quad \forall y \in R(P_m^*),\ m \in N.$$

由此得

$$P_n^* \xrightarrow{p} I^* (n \to \infty). \tag{3.98}$$

由以上情况，方程(3.90)的投影方程是

$$P_n^* A x_n = P_n^* y, \quad x_n \in X_n. \tag{3.99}$$

由式(3.94)及(3.95)知

$$P_n^* A x_n = P_n^* y \Longleftrightarrow \langle A x_n - y, z\rangle = 0, \ \forall z \in X_n, \tag{3.100}$$

$$P_n^* A x_n = P_n^* y,\ x_n \in X_n \Longrightarrow \langle A x_n - y, x_n \rangle = 0. \qquad (3.101)$$

作为定理3.9在此情形下的具体形式是

定理3.10 如果$P_n^* A \xrightarrow{r} A$（离散地）且 $P_n^* \xrightarrow{p} I^*$，

记 $S = \{x : Ax = y,\ \|x\| \leqslant r\}$，

$S_n = \{x_n : P_n^* A x_n = P_n^* y,\ \|x_n\| \leqslant r,\ x_n \in X_n\}$，

其中 r 为常数，则 $S_n \to S$，又如果 $S_n \neq \varnothing$，当 $n \geqslant n_0$，则 $S \neq \varnothing$.

算子 $A: X \to X^*$ 称为具有常数 α 的**强单调算子**，如果

$$\langle A x_1 - A x_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant \alpha \|x_1 - x_2\|^2, \qquad (3.102)$$

$$\alpha > 0,\ \forall x_1, x_2 \in X.$$

显然，如果算子 A 是强单调的，则方程 $Ax = y$ 最多只有一个解.

如果 A 是 Hilbert 空间上的线性正定算子，那末算子 A 也是强单调的. 非线性的强单调算子与线性正定算子具有很相似的性质. 在例1.4和例1.17中我们见到正定算子是正规的，而且其算子的投影序列是离散正规收敛的；对强单调算子也有类似性质，下面将论述这点.

引理3.6 $A: X \to X^*$ 强单调，则 A 为正规算子.

证 假定$\{x_n\}$有界且$\{Ax_n\}$$d$-列紧，由于 X 是自反 Banach 空间，因此存在 $N' \subset N$ 及 $x \in X$，$x_n \rightharpoonup x$，$n \in N'$ 及 $N'' \subset N'$ 与 $y \in X^*$，$Ax_n \to y$，$n \in N'' \subset N'$.

因
$$\langle Ax_n - Ax, x_n - x \rangle = \langle Ax_n - y, x_n - x \rangle + \langle y - Ax, x_n - x \rangle$$

得
$$\langle Ax_n - Ax, x_n - x \rangle \to 0,\ n \in N''.$$

根据单调性条件(3.102)得知 $x_n \to x$，$n \in N''$，于是$\{x_n\}$是 d-列

紧的，即 A 为正规算子。

引理3.7 若 A 为强单调且有界的算子，则$\{P_n^* A\}$离散渐近正规。

证 对任何 x_n、$x \in X$；y_n、$y \in X^*$ 有

$$x_n \rightharpoonup x,\ y_n \to y \Longrightarrow \langle y_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle y, x\rangle. \tag{3.103}$$

假定$\{x_n\}$有界，$\{P_n Ax_n\}d$-列紧，$x_n \in X_n$，于是$\{Ax_n\}$有界，而且存在 $x \in X$，$y \in X^*$ 使

$$x_n \rightharpoonup x,\ n \in N' \subset N;\quad P_n^* Ax_n \to y,\ n \in N'' \subset N'.$$

因 $P_n \xrightarrow{p} I$，$P_n x_n = x_n$，由式(3.103)有

$$\langle Ax, x_n - x\rangle \longrightarrow 0,\quad \langle Ax_n, P_n x - x\rangle \longrightarrow 0,$$

$$\langle Ax_n, x_n - P_n x\rangle = \langle P_n^* Ax_n, x_n - x\rangle \longrightarrow 0,$$

$$\langle Ax_n - Ax, x_n - x\rangle \longrightarrow 0.$$

利用式(3.102)，$x_n \to x$，$n \in N''$，于是$\{x_n\}$是 d 列紧的，即$\{P_n^* A\}$离散渐近正规。

引理3.8 设 A：$X \to X^*$ 强单调、有界且连续，则 $P_n^* A \xrightarrow{r} A$（离散地）。

证 仿式(3.55)得知

$$P_n^* A \xrightarrow{c} A \Longleftrightarrow A \text{ 是连续的.} \tag{3.104}$$

又由引理3.7得知本引理成立。

下面先着重考虑方程 $P_n^* Ax_n = P_n^* y$ 的解的存在性问题。

引理3.9 设 R^n 为实欧氏空间，其内积用记号$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示。假定 $D \subset R^n$ 为有界开凸集且原点0为其内点，又设 $F: \overline{D} \to R^n$ 是连续映射以及

$$\langle Fx, x\rangle > 0,\ x \in \partial D, \tag{3.105}$$

则 $Fx=0$在 D 内至少有一解.

证 记 $Gx=x-Fx$, 由式(3.105)推得

$$\langle x, x\rangle>\langle Gx, x\rangle,\ x\in\partial D, \tag{3.106}$$

因此得知 Gx 在 ∂D 上没有不动点. 记

$$F(x)=(F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x)),\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

考虑 $\quad F_t(x)=(F_{1t}(x), F_{2t}(x), \cdots, F_{nt}(x)),$

其中 $\quad F_{it}(x)=tx_i+(1-t)F_i(x),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in D,$

$$i=1, 2, \cdots, n.$$

因为$\langle F_t(x), x\rangle=t\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+(1-t)\langle F(x), x\rangle>0,\ x\in\partial D$, 因此, 若记 $G_t(x)=x-F_t(x),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in\partial D$, 则有类同于式(3.106)的不等式且

$$G_t(x)\neq x,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in\partial D$$

将 R^n看成特殊的 Banach 空间, 又因在有限维空间中, 连续性与全连续性一致, 因此 应用§3. 2所列关于 旋转量的性质1得知 $\gamma(I-G_1, \partial D)=1$. 因为 $G_1\equiv 0$, $I-G_1$ 与 $I-G$ 同伦, 从而 $\gamma(I-G, \partial D)=1$. 最后由性质2, G 至少有一个不动点, 即 $F(x)=0$至少有一解.

引理3.10 如 果 $A: X\to X^*$ 为具有常数 α 的强单调算子, $y\in X^*$, 则

$$\langle Ax-y, x\rangle>0,\ 当\|x\|\geqslant r>\|A0-y\|/\alpha. \tag{3.107}$$

证 因

$$\begin{aligned}\langle Ax-y, x\rangle&=\langle Ax-A0, x-0\rangle+\langle A0-y, x\rangle\\&\geqslant\alpha\|x\|^2-\|A0-y\|\|x\|,\end{aligned} \tag{3.108}$$

所以 $\langle Ax-y, x\rangle>\alpha\|x\|^2-\alpha r\|x\|\geqslant 0$, 其中 r 为(3.107)所示.

引理3.11 假设 A 是连续的，$y\in X^*$，$r>0$且

$$\langle Ax-y,\ x\rangle>0,\ \|x\|=r, \tag{3.109}$$

则 $P_n^*Ax_n=P_n^*y$ 有解 $x_n\in X_n$，$\|x_n\|<r$，$n\in N$。

证 不失一般性，我们设 $\dim X_n=n$ 并取$\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n\}$为$X_n$ 的任一基，则 $x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^{(n)}\varphi_i$，$x_n\in X_n$ 建立了 x_n 与向量$(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_n^{(n)})$的同构对应关系，而且 $X_n\longleftrightarrow R^n$，取 $F:R^n\longrightarrow R^n$ 为

$$Fx^{(n)}=(\langle Ax_n-y,\varphi_1\rangle,\ \langle Ax_n-y,\varphi_2\rangle,\ \cdots,\ \langle Ax_n-y,\varphi_n\rangle),$$

于是 F 是一连续映射。由式(3.100)

$$Fx^{(n)}=0\Longleftrightarrow P_n^*Ax_n=P_n^*y$$

取 $D_n=\{x_n:x_n\in X_n,\ \|x_n\|<r\}$，又 $D_n\longleftrightarrow D^n\subset R^n$，显然 D^n 是有界开凸集且 $0\in D^n$。同样 $\partial D_n\longleftrightarrow\partial D^n$。经简单的计算并由式(3.109)得

$$\langle Fx^{(n)},x^{(n)}\rangle=\langle Ax_n-y,\ x_n\rangle>0,\ x^{(n)}\in\partial D^n,$$

从而由引理3.9知 存在 $x^{(n)}\in D^n$ 使 $Fx^{(n)}=0$，因此存在 $x_n\longleftrightarrow x^{(n)}$ 使得 $x_n\in D_n$ 且 $P_n^*Ax_n=P_n^*y$。

有了上述预备知识以后，利用定理3.10可得下面的定理。

定理3.11 设 $A:X\to X^*$ 是有界、连续而且具有常数为 α 的强单调算子，则 $P_n^*A\xrightarrow{r}A$（离散地），又设 $y\in X^*$，$r>\|A0-y\|/\alpha$，则方程

$$P_n^*Ax_n=P_n^*y \quad 与 \quad Ax=y$$

分别存在唯一解 $x_n\in X_n$，$\|x_n\|<r$ 与 $x\in X$，$\|x\|<r$，且

$$\|x_n-x\|\leqslant c\|P_nx-x\|^{\frac{1}{2}}, \tag{3.110}$$

其中 c 为常数。

证 由引理3.8知，$P_n^* A \overset{r}{\to} A$(离散地)，又由引理3.10及3.11知

$$S_n = \{x_n: x_n \in X_n,\ P_n^* A x_n = P_n y,\ \|x_n\| \leqslant r\} \neq \varnothing.$$

又因为 $P_n^* A$ 在 X_n 上也是单调的，从而 S_n 为由一个元素 x_n 所组成的集合，即 $S_n = \{x_n\} \neq \varnothing$，利用定理3.10知

$$S = \{x: x \in X,\ Ax = y,\ \|x\| \leqslant r\} \neq \varnothing,$$

而由 A 的强单调性知 S 的元也是唯一的，即 $S = \{x\}$。

现在证明估计式(3.110)。由(3.101)，(3.102)

$$\begin{aligned}\alpha\|x_n - x\|^2 &\leqslant \langle Ax_n - Ax,\ x_n - x\rangle = \langle Ax_n - y,\ -x\rangle \\ &= \langle Ax_n - y,\ P_n x - x\rangle \leqslant \|Ax_n - y\|\|P_n x - x\| \\ &\leqslant \beta\|P_n x - x\|,\end{aligned}$$

其中 $\beta < +\infty$。取 $c = \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ 即得式(3.110)。

上面讨论的结论不难推广到更一般的强单调算子情况：

$$\langle Ax_1 - Ax_2,\ x_1 - x_2\rangle \geqslant \mu(\|x_1 - x_2\|)\|x_1 - x_2\|,\ x_1, x_2 \in X,$$

其中 $\mu(t)$ 是连续的、严格单调上升的非负变量的非负函数，且 $\mu(0) = 0$。为叙述方便起见，本书往后仍然采用(3.102)的定义。单调型算子方程目前已有众多的不同手段的研究工作，读者可以从[13]、[14]，[29]、[32]及其引文中找到。

3.3.2 具有列紧扰动的单调算子方程

与第一章类似地可以证明如下引理。

引理3.12 设 $A: X \to X^*$ 为具有常数 α 的强单调算子，$K: X \to X^*$ 列紧，则 $A + K$ 为正规算子。

证 设$\{x_n\}$为有界，$\{Ax_n+Kx_n\}$ d 列紧，于是存在 $y_0\in X^*$ 及 $N'\subset N$，$Ax_n+Kx_n\to y_0$，$n\in N'$。因为 K 列紧，故存在 $N''\subset N'$ 及 $y_1\in X^*$使 $Kx_n\longrightarrow y_1$，$Ax_n\to(y_0-y_1)\in X^*$，$n\in N''$，又因 A 为强单调算子，因而是正规算子（引理3.6），从而推得$\{x_n\}$是 d 列紧的。

我们仍然假设 X 是自反 Banach 空间，而且 $P_n\xrightarrow{p}I$，$P_n^*\xrightarrow{p}I^*$。讨论 $A+K$ 这种类型的正规算子所形成的方程的投影解的存在性及收敛性问题将是这一小段的主题。它的特殊情况，当 $X=X^*$，$A=I$ 时已于§3.2中有所讨论。

重复§3.2的叙述，可以证明类同于(3.57)的结论：

$$P_n^*\xrightarrow{p}I,\ K\ 全连续\Longrightarrow P_n^*K\xrightarrow{cc}K. \tag{3.111}$$

同样有
$$P_n^*K\xrightarrow{ac}K.$$

引理3.18 若 A 为强单调、有界、连续，而 K 为全连续，则 $P_n^*(A-K)\xrightarrow{r}A-K$（离散地）。

证 根据假设 $P_n^*A\xrightarrow{r}A$（离散地），因为 K 是全连续，故 $P_n^*K\xrightarrow{cc}K$，更有 $P_n^*K\xrightarrow{ac}K$，由式(1.37)引理结论成立。

据此，我们又可以应用定理3.10来讨论方程

$$(A-K)x=y, \tag{3.112}$$

$$P_n^*(A-K)x_n=P_n^*y \tag{3.113}$$

的解的关系，记 $Ax-Kx=(A-K)x$。

为了讨论解的存在性，我们给出若干定义如下：

算子 $K:X\to Y$ 称为**渐近线性**，如果存在 $K_\infty\in L(X,Y)$ 使得

$$\frac{\|Kx-K_{\infty}x\|}{\|x\|}\longrightarrow 0,\text{当}\|x\|\longrightarrow\infty. \qquad (3.114)$$

等价的定义可叙述为

对任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $R<+\infty$ 使得

$$\|Kx-K_{\infty}x\|<\varepsilon\|x\|,\ \|x\|\geqslant R, \qquad (3.115)$$

因此

$$\|Kx\|\leqslant(\|K_{\infty}\|+\varepsilon)\|x\|,\ \|x\|\geqslant R. \qquad (3.116)$$

显然，如果 $K\in L(X,Y)$，则 K 是渐近线性的而且 $K_{\infty}=K$.

算子 $K:X\to Y$ 称为**准有界**，如果存在 $\beta<+\infty$ 和 $R<+\infty$，使得

$$\|Kx\|\leqslant\beta\|x\|,\ \|x\|\geqslant R. \qquad (3.117)$$

如果 $Y=X^*$，即 $K:X\to X^*$，那末，当 K 为准有界时，有

$$\langle Kx,x\rangle\leqslant\beta\|x\|^2,\ \|x\|\geqslant R. \qquad (3.118)$$

又由式(3.116)知，当 K 为渐近线性时，则 K 是准有界的并有 $\|K_{\infty}\|\leqslant\beta$. 事实上，当 $\|x\|\geqslant R$ 时，

$$\frac{\|Kx-K_{\infty}x\|}{\|x\|}<\varepsilon,$$

而由

$$\frac{\|K_{\infty}x\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\|Kx\|}{\|x\|}+\frac{\|Kx-K_{\infty}x\|}{\|x\|}<\beta+\varepsilon.$$

得 $\|K_{\infty}\|\leqslant\beta$.

现在我们讨论方程(3.112)，(3.113)的解的存在性，收敛性以及误差估计问题.

定理3.12 设 $A:X\to X^*$ 是连续、有界且具有常数为 α 的强单调算子，K 是全连续的并且满足式(3.118)，$\beta<\alpha$，$R<+\infty$（例如，K 是渐近线性或准有界算子）. 又设 $y\in X^*$，取 $r\geqslant R$

且 $r>\|A0-y\|/(\alpha-\beta)$，记

$$S=\{x:x\in X,\ (A-K)x=y,\ \|x\|\leqslant r\},$$

$$S_n=\{x_n:x_n\in X_n,\ P_n^*(A-K)x_n=P_n^*y,\ \|x_n\|\leqslant r\},$$

则 $S_n\to S$，$S_n\neq\varnothing$，$n\in N$ 且 $S\neq\varnothing$。

若 $x_0\in S$，$x_n\in S_n$ 且 $x_n\to x_0$，而算子 K 在 x_0 处有 Fréchet 导数 $K'(x_0)$且$\|K'(x_0)\|<\alpha$，则当 n 充分大时有估计式：

$$\|x_n-x_0\|\leqslant M\|P_nx_0-x_0\|^{\frac{1}{2}}, \tag{3.119}$$

其中 M 为常数，同样，如果线性有界算子$K'(x_0)$是非正的，即 $\langle K'(x_0)x,x\rangle\leqslant 0$，$\forall x\in X$，则估计式(3.119)也成立。

证 由引理3.13，$P_n^*(A-K)\xrightarrow{r}A-K$（离散地），由式(3.102)，(3.108)及(3.118)有

$$\langle (A-K)x-y,x\rangle\geqslant(\alpha-\beta)\|x\|^2-\|A0-y\|\ \|x\|>0,\ \|x\|\geqslant r,$$

从而利用引理3.11，$S_n\neq\varnothing$，$n\in N$。又由定理3.10得 $S_n\to S$，$S\neq\varnothing$。

现在证明估计式(3.119)。设 x_0，x_n 分别为(3.112)，(3.113)的解且 $x_n\to x_0$，由(3.102)，

$$\begin{aligned}\alpha\|x_n-x_0\|^2&\leqslant\langle Ax_n-Ax_0,\ x_n-x_0\rangle\\&=\langle Ax_n-Kx_0-y,\ x_n-x_0\rangle\\&=\langle Ax_n-Kx_n-y,\ x_n-x_0\rangle+\langle Kx_n\\&\quad-Kx_0,\ x_n-x\rangle.\end{aligned} \tag{3.120}$$

采用类似证明(3.110)的方法得

$$\langle Ax_n-Kx_n-y,x_n-x_0\rangle=\langle Ax_n-Kx_n-y,P_nx_0-x_0\rangle. \tag{3.121}$$

因为 $K(x)$在 x_0 处存在 Fréchet 导数，故

$$Kx_n-Kx_0=K'(x_0)(x_n-x_0)+\omega(x_0,x_n-x_0), \tag{3.122}$$

其中 $$\theta_n = \frac{\|\omega(x_0, x_n - x_0)\|}{\|x_n - x_0\|} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

因此得

$$\alpha\|x_n - x_0\|^2 \leqslant \langle Ax_n - Kx_n - y,\ P_n x_0 - x_0\rangle + \langle K'(x_0)(x_n - x_0),\ x_n - x_0\rangle + \langle \omega(x_0,\ x_n - x_0),\ x_n - x_0\rangle, \tag{3.123}$$

由于 A、K 均为有界算子，因此如果 $\|K'(x_0)\| < \alpha$，则当 n 充分大时有

$$\|x_n - x_0\|^2 \leqslant \frac{c\|P_n x_0 - x_0\|}{\alpha - \|K'(x_0)\| - \theta_n},$$

其中 c 为常数， 取 $M \geqslant \sqrt{\dfrac{c}{\alpha - \|K'(x_0)\| - \theta_n}}$，即得式(3.119)，定理剩下部分由(3.123)可推出。

作为上述定理的一个特别情形，如果取 X 为 Hilbert 空间，$A = I$，这时因 I 是具有常数 $\alpha = 1$的强单调算子，于是方程(3.112)，(3.112)变为

$$(I - K)x = y, \quad P_n(I - K)x_n = P_n y,$$

其中 K 为全连续算子并且满足(3.118)，$\beta < 1$，$R < +\infty$。这时若常数 r 满足 $r \geqslant R$ 及 $r > \dfrac{\|y\|}{1-\beta}$，则原方程与投影方程均存在解，而且有相应的收敛性结果。至于说解与近似解之间的误差估计，当前有比(3.119)更好一些的估计式（见(3.73)）。

3.3.3 具有列紧扰动的压缩算子方程

下面我们讨论具有列紧扰动的压缩算子方程的投影解。在这里，我们假定 X 是一般的 Banach 空间（不要求自反），并设算子 F、K: $X \to X$，其中 F 满足压缩条件：

$$\|Fx_1-Fx_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\|,\ \alpha<1,\ \forall x_1,x_2\in X, \tag{3.124}$$

而算子 K 是全连续于 X 的。在例1.5中，已见到算子 $I-F$ 是正规算子，现在证明 $I-F+K$ 也是正规算子。事实上，设 $\{x_n\}$ 有界，$\{x_n-Fx_n+Kx_n\}$ d-列紧，因此存在 $y\in X$ 及 $N'\subset N$，$x_n-Fx_n+Kx_n\to y$，$n\in N'$；因 K 列紧，故存在 $y_1\in X$，$N''\subset N'$ 使 $Kx_1\to y_1$，$n\in N''$。这样就有 $x_n-Fx_n\to y-y_1\in X$，$n\in N''$；又因 $I-F$ 是正规算子，因此 $\{x_n\}$ d-列紧，从而 $I-F+K$ 也是正规的。

引理8.14 若 F 满足(3.124)，$P_n: X\to X_n$ 满足 $P_n\xrightarrow{p}I$ 且 $\|P_n\|\leqslant 1$，则 $\{P_n(I-F)\}$ 离散渐近正规而且 $P_n(I-F)\xrightarrow{r}I-F$（离散地）。

证 设 $\{x_n\}$ 有界，$x_n\in X_n$，$\{P_n(x_n-Fx_n)\}$ d-列紧，因此存在 $y\in X$，$N'\subset N$，$P_n(x_n-Fx_n)\to y$，$n\in N'$。由于 F 是压缩算子，因而存在唯一的 x 使 $x=Fx+y$，于是

$$P_n(x_n-Fx_n)\to x-Fx,\ n\in N'. \tag{3.125}$$

因
$$\begin{aligned}\|P_nFx_n-Fx\|&\leqslant\|P_nFx_n-P_nFx\|+\|P_nFx-Fx\|\\&\leqslant\|P_n\|\cdot\alpha\|x_n-x\|+\|(P_n-I)Fx\|\\&\leqslant\alpha\|x_n-x\|+\|(P_n-I)Fx\|,\end{aligned}$$

$$\|x_n-P_nFx_n-(x-Fx)\|\geqslant\|x_n-x\|-\|P_nFx_n-Fx\|,$$

从而

$$\|x_n-P_nFx_n-(x-Fx)\|+\|(P_n-I)Fx\|\geqslant(1-\alpha)\|x_n-x\|. \tag{3.126}$$

根据 $P_n\xrightarrow{p}I$ 及式(3.125)，(3.126)知 $x_n\to x$，$n\in N'$，即 $\{P_n(I-F)\}$ 离散渐近正规。因 F 是连续算子及 $P_n\xrightarrow{c}I$，因此 $P_n(I-$

$F) \xrightarrow{c} I-F, P_n(I-F) \xrightarrow{r} I-F$（离散地）.

引理3.15 若引理3.14 的假设条件成立而且 K 为 X 上的全连续算子，则 $P_n(I-F-K) \xrightarrow{r} I-F-K$（离散地）.

证 本引理的证明完全类同于引理3.13，只需将 P_n^* 改为 P_n.

定理3.13 设 $F, K: X \to X$，F 满足压缩条件(3.124)，K 为 X 上的全连续算子，又 $P_n: X \to X_n$ 满足 $P_n \xrightarrow{p} I$，$\|P_n\| \leqslant 1$，记

$$S=\{x: x \in X,\ x=Fx+Kx,\ \|x\| \leqslant r\},$$

$$S_n=\{x_n: x_n \in X_n,\ x_n=P_nFx_n+P_nKx_n,\ \|x_n\| \leqslant r\},$$

其中 r 为常数，则 $S_n \to S$；若 $S_n \neq \varnothing$（n 充分大），则$S \neq \varnothing$.

现在讨论 S 及 S_n 非空的条件.

引理3.16 设 F、K 满足定理3.13中的假设条件，而且 K 为渐近线性（即满足(3.115)），其中$\|K_\infty\|<1-\alpha$，此处 α 为式(3.124)中的压缩因子，则

$$S_n=\{x_n: x_n \in X_n,\ x_n=P_nFx_n+P_nKx_n,\ \|x_n\| \leqslant r\} \neq \varnothing,$$

其中 r 为某一足够大的正数.

证 因$\|P_n\| \leqslant 1$，故 P_nF 在 X_n 上也满足压缩条件

$$\|P_nFx_1-P_nFx_2\| \leqslant \|P_n\|\,\|Fx_1-Fx_2\| \leqslant \alpha\|x_1-x_2\| \quad (3.127)$$

$$(\alpha<1).$$

又 K 为全连续，显然 P_nK 也是，因为 K 渐近线性，从而 P_nK 也是. 同样$\|P_nK_\infty\| \leqslant \|K_\infty\|<1-\alpha$，故存在 $\varepsilon>0$及 R，使得

$$\|P_nK_\infty\| \leqslant \|K_\infty\|<1-\alpha-2\varepsilon, \quad (3.128)$$

$$\|P_nKx\| \leqslant \|Kx\| \leqslant (\|K_\infty\| + \varepsilon)\|x\|, \quad \|x\| \geqslant R.$$

设 R_1 为某一正数，使

$$\frac{\|F0\|}{\|x\|} < \varepsilon, \quad \|x\| \geqslant R_1; \tag{3.129}$$

另一方面，因 $\|P_n\| \leqslant 1$，所以

$$\|P_nFx + P_nKx\| \leqslant \|P_nFx - P_nF0\| + \|P_nF0\| + \|P_nKx\|$$

$$\leqslant \alpha\|x\| + \|F0\| + (\|K_\infty\| + \varepsilon)\|x\|, \quad \|x\| \geqslant \|R\|.$$

记 $r = \max(R, R_1)$，考虑式(3.129)、(3.128)便有

$$\|P_nFx + P_nKx\| < (\alpha + \varepsilon + (1-\alpha) - 2\varepsilon + \varepsilon)\|X\|$$

$$< \|x\|, \quad \|x\| \geqslant r \text{ 且 } x \in X_n. \tag{3.130}$$

将 X_n 视为特殊的 Banach 空间，因为在有限维空间连续性与全连续是一致的，故由(3.130)及§3.2中所列旋转量性质1及性质2，存在 $x_n \in X_n$ 使

$$x_n = P_nFx_n + P_nKx_n, \quad \|x_n\| < r,$$

即 $S_n \neq \varnothing$.

定理3.14 设算子 F、K: $X \to X$, F 满足压缩条件(3.124)，K 为 X 上的全连续算子；K 为渐近线性的，即满足(3.125)并且 $\|K_\infty\| < 1 - \alpha$，其中 α 为(3.124)式中的压缩因子；投影算子 P_n: $X \to X_n$ 满足条件 $P_n \xrightarrow{p} I$ 且 $\|P_n\| \leqslant 1$，于是当记

$$S_n = \{x_n;\ x_n \in X_n,\ x_n = P_nFx_n + P_nKx_n,\ \|x_n\| \leqslant r\},$$

$$S = \{x;\ x \in X,\ x = Fx + Kx,\ \|x\| \leqslant r\}$$

时（其中 r 为某一大数），$S_n \neq \varnothing$, $n \in N$; $S_n \to S$, $S \neq \varnothing$.

假定 $x_o \in S$, $x_n \in S_n$, $x_n \to x_o$ 且 K 在 x_o 处的 Fréchet 导

数存在，$\alpha+\|K'(x_o)\|<1$，则当 n 充分大以后

$$\|x_n-x_o\|<\frac{\|P_nx_o-x_o\|}{1-(\alpha+\|K'(x_o)\|+\theta_n)}, \tag{3.131}$$

其中 $\theta_n\to 0(n\to\infty)$。

证 定理的前半部可以由定理3.13和引理3.16而得。现在证明估计式(3.131)。因

$$x_n-x_o=P_nFx_n+P_nKx_n-x_o$$

$$=(P_nFx_n-P_nFx_o)+(P_nKx_n-P_nKx_o)+(P_nx_o-x_o),$$

而 $Kx_n-Kx_o=K'(x_o)(x_n-x_o)+\omega(x_o,x_n-x_o)$，

其中 $$\theta_n=\frac{\|\omega(x_o,x_n-x_o)\|}{\|x_n-x_o\|}\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此

$$\|x_n-x_o\|\leqslant\alpha\|x_n-x_o\|+\|K'(x_o)\|\|x_n-x_o\|$$

$$+\theta_n\|x_n-x_o\|+\|P_nx_o-x_o\|.$$

当 n 充分大以后，可使 $\alpha+\|K'(x_o)\|+\theta_n<1$，且有

$$\|x_n-x_o\|\leqslant\frac{\|P_nx_o-x_o\|}{1-(\alpha+\|K'(x_o)\|+\theta_n)}.$$

在引理3.16及定理3.14中，如果将 K 是渐近线性且$\|K_\infty\|<1-\alpha$ 的条件换成 K 满足(3.117)且 $\beta+\alpha<1$，这时定理中的 r 可直接假定为 $r=\max(R_1,R)$，其中 R_1 为使 $\|F0\|/R_1<\varepsilon$ 且 $\beta+\alpha+\varepsilon<1$ 的正数，若设 $F\equiv 0$，定理3.14就退化为定理3.8中所讨论的那种类型的方程，此时 $\alpha=0$，而条件(3.117)及 $\beta<1$ 相当于那里的条件 H_1。利用它可解决解的存在性问题。在讨论误差估计时所外加的条件 $\|K'(x_o)\|<1$ 相当于条件：存在 $(I-K'(x_o))^{-1}$，即 1 不是 $K'(x_o)$的特征值。

假如 X 是 Hilbert 空间，显然 $I-F$ 便是映 X 到 X 的强单调算子，因此我们所讨论的问题又属于本节前面所分析过的具有列紧扰动的强单调算子方程的范畴了。

为了后面的应用方便，给出一个辅助性引理。

引理3.17 设 Ω 为 n 维空间有界可测集，$g(u_1, u_2, \cdots, u_m; x)$是实函数，它关于所有 $u_i\in(-\infty, +\infty)$是连续的，$i=1, 2, \cdots, m$；对所有固定的 $u_i(i=1,2\cdots,m)$，关于 $x\in\Omega$ 是可测的，则当有 $a(x)\in L^q(\Omega)$且

$$|g(u_1, u_2, \cdots, u_m; x)|\leqslant a(x)+b\sum_{k=1}^{m}|u_k|^{p-1}$$

时$\left(其中\ b>0,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$算子 h：

$$hu=g(u_1(x), u_2(x), \cdots, u_m(x), x)$$

有定义且是连续的、有界的，映$[L^p(\Omega)]^m$ 于 $L^q(\Omega)$，记号$[L^p(\Omega)]^m$ 表示积空间（详细证明参看[16]）。

例3.4 在 $L^2(0, 1)$中考虑方程

$$u(t)=\int_0^1 k(t, s)f(u(s), s)ds+g(t), \tag{3.132}$$

其中 $k(t, s)$在 $0\leqslant t,\ s\leqslant 1$ 上连续且

$$\|k\|=\left(\int_0^1\int_0^1 k(t, s)^2 dtds\right)^{\frac{1}{2}}<1. \tag{3.133}$$

设 $f(u,s)$是$(-\infty,+\infty)\times[0,1]$上的连续函数，而且$|f(u,s)-u|$于$(-\infty, +\infty)\times[0, 1]$上有界，$g(t)$为$[0, 1]$上的连续函数。

方程(3.132)的算子形式是

$$(I-KF)u=g, \tag{3.134}$$

其中

$$Ku(t)=\int_0^1 k(t,s)u(s)ds, \tag{3.135}$$

$$Fu(s)=f(u(s),s), \tag{3.136}$$

如果取 $X=L^2(0,1)$，显然 K 是 $L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ 的线性列紧算子。又根据引理3.17，由于

$$|f(u(s),s)|\leqslant M+|u(s)|,\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\ M\text{ 为常数}, \tag{3.137}$$

所以 F：$L^2(0,1)\to L^2(0,1)$，并且是连续的。由于 $|f(u,s)-u|$ 是有界的，得知 F 还是渐近线性的，且 $F_\infty=I$，从而推得 KF 是全连续渐近线性算子且 $(KF)_\infty=K$。因此，存在 β 与 R 使得 $\|K\|=\|(KF)_\infty\|\leqslant\beta<1$，

$$\|KFu\|\leqslant\beta\|u\|,\quad \|u\|\geqslant R,$$

$$(KFu,u)\leqslant\beta\|u\|^2,\quad \|u\|\geqslant R,$$

根据定理3.12，方程(3.134)及其投影方程

$$u_n-P_nKFu_n=P_ng \tag{3.138}$$

当 $P_n\xrightarrow{p}I$ 时在球 $\|u\|\leqslant\|g\|/(1-\beta)$ 内存在解，而且投影解将收敛于原方程(3.134)的解。

与例3.3一样，如果采用山形函数 $e_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$ 为基函数，即取 $X_n=[e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t)]$，并设 P_n：$X\to X_n$ 是 L^2 中的最小二乘投影，那末 正如第二章曾经指出过的，$P_nu\to u$，$\forall u\in L^2(0,1)$。

取近似解为 $u_n(t)=\sum\limits_{i=1}^n c_ie_i(t)$ 那末(3.132)的近似方程便是

$$\sum_{i=1}^n c_i(e_i(t),e_j(t))-\int_0^1\int_0^1 k(t,s)\cdot e_j(t)f(u_n(s),s)dsdt$$
$$=\int_0^1 g(t)e_j(t)dt,\qquad j=1,2,\cdots,n,$$

通过数值积分然后解出 c_i 便得到近似解。

例3.5 考虑与上例相当类似的方程：

$$a(u(t),t)-\int_0^1 k(t,s)f(u(s),s)ds=g(t). \qquad (3.139)$$

假定$\|k\|<\infty$(见(3.133))，f 满足例3.4中的条件，$a(u,t)$ 假定连续于$(-\infty,+\infty)\times[0,1]$，$|a(u,t)|\leqslant c+d|u|$，$c$，$d$ 均为常数，且 $\frac{\partial a}{\partial u}\geqslant\alpha>0$ 于$(-\infty,+\infty)\times[0,1]$。这时(3.139)的算子形式是

$$(A-KF)u=g, \qquad (3.140)$$

其中 $Au(t)=a(u(t),t)$。K、F 如例3.4所示。与上例一样，引用引理3.17，算子 A：$L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ 是连续的而且有界，又由条件 $\frac{\partial a}{\partial u}\geqslant\alpha>0$ 得知 A 是具有常数为 α 的强单调算子，因此，如果假定$\|K\|<\beta<\alpha$ 时，由定理3.12，方程(3.139)及其近似方程在一个充分大的球内均有解，而且近似解收敛于(3.139)的解。

例3.6 讨论边值问题

$$\begin{cases} a_0(x,u,u_x)-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,u,u_x)=f(x,u) \\ u\Big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \qquad (3.141)$$

的 Галеркин 解，其中 Ω 为 R^n 的有界区域。

(3.141)式的变分方程是

$$a(u,v)=(f(x,u),v), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega), \qquad (3.142)$$

其中

$$a(u, v)=\int_{\Omega}\sum_{i=0}^{n} a_i(x, u, u_x)v_i dx,$$

$$v_i=\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \cdots, n, \quad v_0=v,$$

$$(f(x, u), v)=\int_{\Omega} f(x, u)v dx.$$

假定 $a_i(x, \xi)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$, $x\in\Omega$, $\xi\in R^{n+1}$ 对所有变量都是连续函数，此外

$$|a_i(x, \xi)-a_i(x, \eta)|^2\leqslant M\|\xi-\eta\|^2_{R^{n+1}},$$

$$i=0, 1, 2, \cdots, n, \quad \xi, \eta\in R^{n+1},$$

其中 M 为常数，且

$$\sum_{i=0}^{n}[a_i(x, \xi)-a_i(x, \eta)](\xi_i-\eta_i)\geqslant\alpha\|\xi-\eta\|^2_{R^{n+1}},$$

$$\forall\xi, \eta\in R^{n+1}.$$

设 $f(x, u)$ 为 $\Omega\times R$ 上的连续函数且满足

$$|f(x, u_1)-f(x, u_2)|\leqslant\beta_2|u_1-u_2|, \quad \forall u_1, u_2,$$

$$|f(x, u)-\beta_1 u|\leqslant M_1(x, u)+c_2|u|^\theta, \quad \theta<1, \quad \beta_1<\alpha,$$

其中 $\int_{\Omega}|M_1(x, u)|^2 dx$ 有界，$\forall u\in H_0^1(\Omega)$.

在这些假设条件下，可以定义非线性算子 A、B: $H_0^1(\Omega)\longrightarrow H_0^1(\Omega)$使得

$$a(u, v)=(Au, v), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

$$(f(x, u), v)=(Bu, v), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

于是式(3.142)等价于算子方程

$$Au = Bu, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

而且不难证明：算子 A 满足 Lipchitz 条件，因而是连续的、有界的，还满足强单调算子条件：

$$(Au - Av, u - v) \geqslant \alpha \|u - v\|^2, \ \alpha > 0, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

又算子 B 是渐近线性的且 $\|B_\infty\| = \beta_1 < \alpha$。

假设 $H_n \subset H_0^1(\Omega)$ 是有限维子空间，P_n: $H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_n$ 是正交投影；$\{H_n\}$ 终归稠密于 $H_0^1(\Omega)$，则由定理3.12，方程(3.142)的 Галеркин 方程

$$P_n A u_n = P_n B u_n, \quad u_n \in H_n$$

或
$$a(u_n, v_n) = (f(x, u_n), v_n), \quad \forall v_n \in H_n$$

有解，且其解集收敛于(3.142)的解集。

用完全类似的讨论方式，读者不难列举定理3.11及定理3.14的应用的例子。

3.4 D-半连续正规算子方程的投影解

前面三节讨论了三种连续算子方程的投影解，它们实际上都是连续正规算子方程，只不过根据算子的不同类型采用了一些特别的处理方法罢了。在实际数学物理问题中（例如变分问题），所出现的算子有时并不连续，但却是 D-半连续的，即映强收敛列为弱收敛列。本节我们将讨论这种类型的算子方程的解。本节的结果可以看作是前面一些结果在更弱的假设条件下的一种推广，而且就其讨论方法来说也几乎是平行的([4])。

3.4.1 基本术语与一般收敛性定理

与过去一样，我们仍然假设 X、Y 为 Banach 空间。A_n、

A: $X \to Y$, $x, x_o \in X$ 是任意的。

算子 A 称为**D-半连续**，如果

$$Ax \longrightarrow Ax_o, \text{ 当 } x \to x_o. \qquad (3.143)$$

算子列 $\{A_n\}$ 称为**渐近 D-半连续**，如果

$$A_n x - A_n x_o \longrightarrow 0, \text{ 当 } x \to x_o, \ n \to \infty. \qquad (3.144)$$

算子 A_n 称为**D-半点态收敛**于 A（记为 $A_n \xrightarrow{p} A$），如果

$$A_n x \longrightarrow Ax, \text{ 当 } n \to \infty, \ \forall x \in X. \qquad (3.145)$$

算子 A_n 称为**D-半连续收敛**于 A（记为 $A_n \xrightarrow{dc} A$），如果

$$x_n \to x_o, \ n \to \infty \Longrightarrow A_n x_n \longrightarrow Ax_o, \ n \to \infty \qquad (3.146)$$

或

$$A_n x \longrightarrow Ax_o, \text{ 当 } x \to x_o \text{ 且 } n \to \infty \text{ 时}. \qquad (3.147)$$

不难看出，上述两种定义方式是等价的。

式(3.143)～(3.147)中的弱收敛也可以用对任意泛函 $f \in Y^*$ 的形式表示出来，例如 A 称为 D-半连续，如果

$$x \to x_o \Longrightarrow f(Ax) \longrightarrow f(Ax_o), \ \forall f \in Y^*.$$

算子列 $\{A_n\}$ 称为**D-半正规收敛**于 A（记为 $A_n \xrightarrow{dr} A$），如果

$$A_n \xrightarrow{dc} A, \text{ 并且 } \{A_n\} \text{ 渐近正规}. \qquad (3.148)$$

算子列$\{A_n\}$称为**离散地 D-半正规收敛**于 A（记为 $A_n \xrightarrow{dr} A$（离散地）），如果

$$A_n \xrightarrow{dc} A, \ \{A_n\} \text{ 离散渐近正规}. \qquad (3.149)$$

不难证明，类似于定理1.5的结论：

$$A_n \xrightarrow{dc} A \Longleftrightarrow A_n \xrightarrow{p} A, \ \{A_n\}\text{渐近 }D\text{-半连续} \quad (3.150)$$

成立，因为当令 $x_n = x_o$ 时，$A_n \xrightarrow{dc} A \Longrightarrow A_n \xrightarrow{p} A$，由等式

$$(A_n x - A x_o) - (A_n x - A_n x_o) = A_n x_o - A x_o$$

及式(3.147)得知(3.150)的左端可推出右端；反之若 $A_n \xrightarrow{p} A$，由式(3.150)的右端可推出左端。

利用(3.150)还可以得到

$$A_n \xrightarrow{dc} A \Longrightarrow A\text{ 是 }D\text{-半连续的}, \quad (3.151)$$

事实上，因为 $\forall f \in X^*$ 有

$$|\langle f, Ax - Ax_o\rangle| \leqslant |\langle f, Ax - A_n x\rangle| + |\langle f, A_n x - A_n x_o\rangle| + |\langle f, A_n x_o - Ax_o\rangle|,$$

从而式(3.151)成立。

根据(3.151)又有

$$A_n \xrightarrow{dr} A \Longrightarrow A\text{ 是 }D\text{-半连续的}, \quad (3.152)$$

$$A_n \xrightarrow{dr} A(\text{离散地}) \Longrightarrow A\text{ 是 }D\text{-半连续的}.$$

在讨论投影法之前，先给出一个一般性的收敛性定理。以下假设 A、A_n: $X \to Y$，y、$y_n \in Y$，$X_n \subset X$。

引理3.18 假定 $A_n \xrightarrow{dr} A$(离散地)，$\{x_n\}$ 有界，$x_n \in X_n$，$A_n x_n \to y$，则 $\{x_n\}^* \neq \varnothing$ 且 $Ax = y$，$\forall x \in \{x_n\}^*$。

证 证明方法完全类同于引理3.5，因为 $\{A_n\}$ 是离散地渐近正规，故若 $\{x_n\}$ 有界，$x_n \in X_n$ 时，由 $A_n x_n \to y \Longrightarrow \{x_n\}^* \neq \varnothing$。设 $x \in \{x_n\}^*$，$x_n \to x$，$n \in N' \subset N$，由式(3.146)，$A_n x_n \longrightarrow$

Ax, $n\in N'$; 因 $A_n x_n \to y$, $n\in N$, 由弱极限的唯一性, $Ax=y$.

定理3.15 假定 $A_n \xrightarrow{dr} A$（离散地），B、$B_n\subset X$，$\cup B_n$ 有界，$\{B_n\}^*\subset B$ 并且 $y_n\to y$. 记

$$S=\{x:\ x\in X,\ x\in B,\ Ax=y\},$$

$$S_n=\{x_n:\ x_n\in X_n,\ x_n\in B_n,\ A_n x_n=y_n\},$$

则 $\{S_n\}$ d-列紧，$\{S_n\}^*\subset S$，因而 $S_n\to S$. 若 $S_n\neq\varnothing$，$n\in N'\subseteq N$，则 $S\neq\varnothing$.

特别情形，可取 $B_n=B$ 是有界闭集或 $y_n=y$.

证 因 $\cup B_n$ 有界，故 $\cup S_n$ 也有界；又因 $\{A_n\}$ 是离散渐近正规及 $y_n\to y$，从而 $\{S_n\}$ d-列紧. 设 $x\in\{S_n\}^*$，于是存在 $N'\subset N$，使得 $x_n\in B_n$，$x_n\in X_n$，$A_n x_n=y_n$，$n\in N'$ 且 $x_n\to x$，$n\in N'$. 由引理3.18知 $Ax=y$. 又由 $\{B_n\}^*\subset B$，推得 $x\in S$，即 $\{S_n\}^*\subset S$. 由定理1.1，$S_n\to S$. 又由式(1.9)推得当 $S_n\neq\varnothing$，$n\in N'\subseteq N$ 时有 $S\neq\varnothing$.

3.4.2 D-半连续强单调算子方程

假设 X 是自反 Banach 空间，从而 $X=X^{**}$，与3.3.1一样，设 P_n: $X\to X_n$ 是投影算子，$\dim X_n<+\infty$，$P_n \xrightarrow{p} I$ 而且 $P_n^* \xrightarrow{p} I$.

假设 A: $X\to X^*$，方程

$$Ax=y \tag{3.153}$$

的投影方程为

$$P_n^* A x_n = P_n^* y,\quad x_n\in X_n, \tag{3.154}$$

同样地，式(3.100)，(3.101)也适用于(3.154).

引理3.19 设 $A: X \to X^*$ 是 D-半连续的，$y \in X^*$，$r>0$ 而且 $\langle Ax-y, x\rangle > 0$，$\|x\|=r$，则 $P_n^* A x_n = P_n^* y$ 存在解 $x_n \in X_n$，$\|x_n\|<r$，$n \in N$。

这个引理可以毫无改动地照引理3.11的叙述而获得证明。因为在有限维空间中，弱收敛与强收敛概念是一致的，因此 A 在有限维子空间 X_n 上是连续的。于是有下面定理。

定理3.16 设 $y \in X^*$，$r>0$。假定 $P_n^* A \xrightarrow{dr} A$（离散地）且 $\langle Ax-y, x\rangle > 0$，$\forall \|x\|=r$，记

$$S=\{x: x \in X, \ Ax=y, \ \|x\| \leqslant r\},$$

$$S_n=\{x_n: x_n \in X_n, P_n^* A x_n = P_n^* y, \|x_n\| \leqslant r\},$$

则 $S_n \neq \varnothing$，$n \in N$，$S_n \to S$ 且 $S \neq \varnothing$。

证 由式(3.152)知 A 是 D-半连续的。又由引理3.19知 $S_n \neq \varnothing$。应用定理3.15即知结论成立。

下面我们将证明，如果 A 是有界的，D-半连续且是具有常数为 α 的强单调算子，那末 $P_n^* A$ 离散地 D-半正规收敛于 A，因而上述定理至少可以应用到讨论这类算子方程的投影解。

首先证明

$$A \text{ 有界，} D\text{-半连续} \Longrightarrow P_n^* A \xrightarrow{dc} A. \qquad (3.155)$$

为此目的，需要证明 $\forall f \in X^{**}=X$，当 $x \to x_0$，$n \to \infty$ 时有 $f(P_n^* A x_n) \to f(A x_0)$ 成立。事实上，因为 $P_n \xrightarrow{p} I$ 且

$$P_n^* A x_n = (P_n^* A x_n - A x_n) + A x_n,$$

$$\langle P_n^* A x_n - A x_n, f\rangle = \langle A x_n, P_n f - f\rangle,$$

故当 A 有界时，$\langle A x_n, P_n f - f\rangle \to 0$。又因 A 为 D-半连续，故 $\forall f \in X^{**}$，$x_n \to x_0$，$n \to \infty$ 时，$f(A x_n) \to f(A x_0)$，从而

$f(P_n^* Ax_n) \to f(Ax_0)(x_n \to x_0,\ n \to \infty)$，即 $P_n^* A \xrightarrow{dc} A$。

由引理3.7有

A 有界、强单调 $\Longrightarrow \{P_n^* A\}$离散渐近正规。　　　　(3.156)

由(3.149)、(3.155)及(3.156)便得到

引理3.20 若 $A: X \to X^*$ 有界、D-半连续而且是具有常数为 α 的强单调算子，则 $P_n^* A \xrightarrow{dr} A$（离散地）。

定理3.17 若 A 的假设同引理3.20，又设 $y \in X^*$，$r > \|A0 - y\|/\alpha$，则 $Ax = y$、$P_n^* Ax_n = P_n^* y$ 在球 $B = \{x: \|x\| \leqslant r\}$、$B_n = B \cap X_n$ 内分别有唯一解 x 及 x_n 且 $x_n \to x$。还有估计式：

$$\|x_n - x\| \leqslant c\|P_n x - x\|^{\frac{1}{2}},$$

其中 c 为一已知常数。

证 因

$$\langle A0 - y, x\rangle \leqslant \|A0 - y\|\|x\| < \alpha r\|x\|,$$

$$\langle Ax - y, x\rangle = \langle Ax - A0, x - 0\rangle + \langle A0 - y, x\rangle$$

$$> \alpha\|x\|^2 - \alpha r\|x\| \geqslant 0,\ \|x\| \geqslant r,$$

因此由引理3.20、定理3.16及 A 和 $P_n^* A$ 分别为 X 和 X_n 上的强单调算子推得解的存在性、唯一性及收敛性。剩下部分的证明同定理3.11。

完全类似于定理3.17及定理3.12的作法有

定理3.18 若 $A: X \to X^*$ D-半连续、有界且具有常数为 α 的强单调算子，$B: X \to X^*$ 全连续且满足

$$\|Bx\| \leqslant \beta\|x\|,\ \|x\| \geqslant R, \tag{3.157}$$

其中 β、R 为常数。设 $\alpha > \beta$，$y \in X^*$，则当 $r = \max\{R, \|A0 - y\|/(\alpha - \beta)\}$时，集合

$$S_n=\{x_n:\ x_n\in X_n,\ P_n^*Ax_n+P_n^*Bx_n=P_n^*y,\ \|x_n\|\leqslant r\},$$

$$S=\{x:\ x\in X,\ Ax+Bx=y,\ \|x\|\leqslant r\}$$

均非空，而且 $S_n\to S$。又若 $x_0\in S$，$x_n\in S_n$，$x_n\to x_0$ 且 $B'(x_0)$ 存在并满足 $\|B'(x_0)\|<\alpha$，则当 n 充分大时

$$\|x_n-x_0\|\leqslant M\|P_nx_0-x_0\|^{\frac{1}{2}},$$

其中 M 为常数。

如果定理3.18中没有条件(3.157)的假设，这时由定理3.15及定理3.12得下述结论

定理3.19 若 A: $X\to X^*$ 是 D-半连续、有界且具有常数为 α 的强单调算子，B: $X\to X^*$ 全连续，记

$$S_n=\{x_n:x_n\in X_n,\ P_n^*Ax_n+P_n^*Bx_n=P_n^*y,\ \|x_n\|\leqslant r\},$$

$$S=\{x:\ x\in X,\ Ax+Bx=y,\ \|x\|\leqslant r\},$$

其中 r 为正常数，那末若 $S_n\neq\varnothing$（n 充分大以后）便有 $S\neq\varnothing$，且 $S_n\to S$。若 $x_0\in S$，$x_n\in S_n$，$x_n\to x_0$ 且 $B'(x_0)$ 存在并满足 $\|B'(x_0)\|<\alpha$，则当 n 充分大以后

$$\|x_n-x_0\|\leqslant M\|P_nx_0-x_0\|^{\frac{1}{2}},$$

其中 M 为常数。

3.4.3 D-半连续列紧算子的不动点

在§3.2节，我们曾经讨论过全连续算子（即连续的列紧算子）的不动点问题。正如我们所知道的，如果算子 K 是列紧的，那么不仅 $I-K$ 是正规的（见例1.6），进一步，当 K 也是连续时，得知 $P_nK\xrightarrow{ac}K$；$P_n(I-K)\xrightarrow{r}(I-K)$（离散地）

（见例1.16）。这样一来，全连续算子的不动点问题的近似解实际上可以纳入离散正规收敛的范围而加以讨论。基于这样一个想法，下面我们将D-半连续的列紧算子的不动点近似问题作为离散的D-半正规收敛算子理论的一个特例而加以讨论。

假定X是一般的Banach空间，投影算子P_n：$X\to X_n$满足$P_n \xrightarrow{p} I$，$\dim X_n<+\infty$。算子K：$X\to X$与§3.2中一样，记

$$B_r=\{x:\ x\in X:\ \|x\|<r\},\ \partial B_r=\{x:\ x\in X,\ \|x\|=r\},$$

其中r为某一正数。同样地，我们保留§3.2中条件H_1、H_2、H_{1n}、H_{2n}的意义。

方程

$$Kx=x \tag{3.158}$$

的投影方程是

$$P_nKx_n=x_n,\ x_n\in X_n. \tag{3.159}$$

引理3.21 设X，Y为Banach空间，记$L(Y)$为Y上的一切映Y于自己的有界线性算子集合，假设A：$X\to Y$是D半连续的，而$T\in L(Y)$，则TA：$X\to Y$是D-半连续的。

证 记T^*：$Y^*\to Y^*$为T的共轭算子，则

$$\langle f, TAx-TAx_0\rangle=\langle T^*f,\ Ax-Ax_0\rangle,\ f\in Y^*,$$

由式(3.143)推得TA是D-半连续的。

引理3.22 设K：$X\to X$为D-半连续，H_{1n}或H_{2n}成立，则存在x_n使

$$P_nKx_n=x_n,\ x_n\in X_n,\ \|x_n\|\leqslant r. \tag{3.160}$$

证 由引理3.21知P_nK是D-半连续的，因为$\dim X_n<+\infty$，因此P_nK在X_n上是连续的，引理剩下部分的证明完全同

引理3.1，这里不再重复。

定理3.20 设 $I-P_nK \xrightarrow{dr} I-K$（离散地），而且当 $n \geqslant n_0$ 时满足 H_{2n}，记

$$S=\{x;\ x\in X,\ Kx=x,\ \|x\|\leqslant r\},$$
$$S_n=\{x_n:\ x_n\in X_n,\ P_nKx_n=x_n,\ \|x_n\|\leqslant r\},$$

则当 $n\geqslant n_0$ 时 $S_n\neq\varnothing$, $S_n\to S$ 且 $S\neq\varnothing$。

证 由式(3.152)知 $I-K$ 是 D-半连续的，因而 K 也是 D-半连续的，根据引理3.22，$S_n\neq\varnothing$ $(n\geqslant n_0)$，由定理3.15，$S_n\to S$, $S\neq\varnothing$。

下面证明，如果 K 是列紧的且 D-半连续，则 $I-P_nK$ 离散地 D 半正规收敛于 $I-K$，因而作为一个特例，定理3.20也适用于这样的情况，为说明这点，注意由式(3.56)与(1.23)知：K 列紧 $\Longrightarrow$ $\{P_nK\}$渐近列紧，从而由(1.36)得

$$K\text{ 列紧}\Longrightarrow\{\lambda I-P_nK\}\text{离散渐近正规},\ \lambda\neq 0. \tag{3.161}$$

从而 K 列紧、D-半连续 $\Longrightarrow$

$$\lambda I-P_nK \xrightarrow{dc} \lambda I-K(\lambda\neq 0). \tag{3.162}$$

事实上，设 $x_n\to x$，由式(3.143)，$Kx_n\longrightarrow Kx$，又因 K 是列紧的，故$\overline{\{Kx_n\}}$是列紧的. 然而 $P_n \xrightarrow{p} I$ 于任一列紧集上是一致的，所以 $P_nKx_n-Kx_n\to 0$，因此推得当 $x_n\to x$时

$$P_nKx_n=(P_nKx_n-Kx_n)+Kx\longrightarrow Kx,$$

根据 D-半连续收敛的定义(3.146)知(3.162)自然成立。由式(3.161)、(3.162)、(3.149)得

$$K\text{ 列紧、}D\text{ 半连续}\Longrightarrow \lambda I-P_nK \xrightarrow{dr} \lambda I-K\text{（离散地）},\quad \lambda\neq 0. \tag{3.163}$$

类似地，可证

K 列紧、D-半连续，$\lambda_n \to \lambda \neq 0$

$$\Longrightarrow \lambda_n I - P_n K \xrightarrow{dr} \lambda I - K\text{（离散地）}. \tag{3.164}$$

下面我们建立一个满足条件 H_{2n} 的充分条件。

引理3.23 设 K 列紧，D-半连续；假定 H_1 或 H_2 满足，则当 n 充分大时，H_{2n} 成立。

证 与引理3.2的证明一样，采用反证法。假若结论不成立，则存在 x_n 和 λ_n，$n \in N' \subset N$ 使

$$P_n K x_n = \lambda_n x_n,\ x_n \in \partial B_r \cap X_n,\ \lambda_n \geqslant 1,$$

重复引理3.2中的叙述，可证存在 λ，使 $\lambda_n \to \lambda$，$n \in N'' \subset N'$ 且 $\lambda \geqslant 1$。又由式(3.164)知

$$\lambda_n I - P_n K \xrightarrow{dr} \lambda I - K\text{（离散地）}.$$

再根据引理3.18知存在 x 使

$$Kx = \lambda x,\ x \in \partial B_r,\ \lambda \geqslant 1,$$

这与 H_1 及 H_2 矛盾，因此引理成立。

综合上面结果可得定理：

定理3.21 假定 K 是列紧的，D-半连续的，条件 H_1 或 H_2 成立，记

$$S = \{x:\ x \in X,\ Kx = x,\ \|x\| \leqslant r\},$$

$$S_n = \{x_n:\ x_n \in X_n,\ P_n K x_n = x_n,\ \|x_n\| \leqslant r\},$$

则当 n 充分大以后，$S_n \neq \varnothing$，$S_n \to S$ 且 $S \neq \varnothing$。

若 x_0 是方程 $Kx = x$ 的解，x_n 是方程 $P_n K x_n = x_n$ 的解且 $x_n \to x_0$；假定 K 在 x_0 处 Fréchet 导数 $K'(x_0)$ 存在，而且 $[I - K'(x_0)]^{-1}$ 存在并于 X 有界，则

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \frac{c\|P_n x_0 - x_0\|}{1 - M_n} \quad (n \geqslant n_0), \tag{3.165}$$

其中 c 为常数，$M_n \to 0$，n_0 为一足够大的自然数。

证 定理前半部分由式(3.163)、引理3.23及定理3.20推得。估计式(3.165)情况 类同于§3.2的定理3.8， 在当前的 假设条件下，K 虽然不假设连续，但因 K 列紧，故由引理3.4，$K'(x_0)$ 列紧且是连续的线性算子，套用定理3.8中的推导过程，式(3.165)成立。

例3.7 讨论边值问题

$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) = f(x), x \in \Omega \\ D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\beta| \leqslant m - 1 \end{cases} \tag{3.166}$$

的广义解，其中 Ω 为 R^n 上的有界区域，$\partial\Omega$ 为其边界， 它的变分方程是

$$a(u, v) = (f(x), v), \quad u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega), \tag{3.167}$$

其中

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) D^\alpha v dx, \tag{3.168}$$

$$(f(x), v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx. \tag{3.169}$$

记 $V \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$，它是可分的 Hilbert 空间，而 $V^* = W_2^{-m}(\Omega)$。假定 $f(x) \in L^2(\Omega)$，$A_\alpha(x, \xi_0, \cdots, \xi_m)$关于每一个变元连续，且

$$|A_\alpha(x, \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)| \leqslant a_\alpha(x) + b \sum_{k=0}^m |\xi_k|,$$

$$a_\alpha(x) \in L^2(\Omega). \tag{3.170}$$

根据引理3.17，$A_\alpha \in L^2(\Omega)$，又广义导数 $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$， 从而

式(3.168)可以定义一个非线性算子 $A: V \to V^*$，它满足

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle, \quad \forall v \in V.$$

同样可定义 $F \in V^*$ 使

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f(x)v(x)dx,$$

因而式(3.167)等价于方程

$$Au = F, \quad F \in W_2^{-m}(\Omega). \tag{3.171}$$

根据假设条件(3.170)可以证明 A 是 D-半连续算子而且是有界的。事实上，由于函数 $A_\alpha(x, \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)$ 所产生的算子映 $[L^2(\Omega)]^{m+1}$ 入 $L^2(\Omega)$ 而且是连续的、有界的；又在 $W_2^m(\Omega)$ 范数下 $\|u_n - u_0\| \to 0$ 推得在 L^2 范数意义下 $D^r u_n \to D^r u_0$, $|r| \leqslant m$，因而在 L^2 范数下

$$A_\alpha(x, u, Du, \cdots, D^m u) \longrightarrow A_\alpha(x, u_0, Du_0, \cdots, D^m u_0),$$

从而 $\quad a(u_n, v) \longrightarrow a(u_0, v), \quad \forall v \in V,$

即 $\quad A(u_n) \longrightarrow A(u_0) \quad (n \to \infty).$

算子 A 的有界性可直接由引理3.17及式(3.168)获得。

如果 $a(u, v)$ 还满足条件

$$a(u, u-v) - a(v, u-v) \geqslant c_0\|u-v\|_V^2, \tag{3.172}$$

那末，A 便是 D 半连续、有界、强单调的。因此定理3.17的基本假设满足。若设投影算子 P_n 是正交的且 $P_n \xrightarrow{p} I$，那末可以应用定理3.17而获得近似解的存在性，收敛性结果。

如果式(3.166)中的微分方程的右端与 u 有关，此时(3.171)已不便于描述现在的问题了，因此更一般的变分方程

$$a(u, v)=b(u, v), \quad u, v \in V$$

的解及近似解的有关结论则可应用定理3.18而得到，这里 V 为 Hilbert 空间，$a(u, v)$、$b(u, v)$ 为 $V\times V$ 上的二元泛函，当 u 固定时它是线性有界的，而当 v 固定时，一般为非线性泛函.

如果再设 H 为另一 Hilbert 空间，$\overline{V}=H$，V 是连续地且列紧地嵌入 H，且假定 $a(u, v)$、$b(u, v)$ 满足下述条件：

（i） $u_n \to u_0 \Longrightarrow a(u_n, v) \to a(u_0, v)$；

（ii） $|a(u, v)| \leqslant \alpha_0(u)\|v\|_V$，$\forall u, v\in V$，其中 $\alpha_0(u)$ 为 V 上的有界泛函；

（iii） $a(u_1, u_1-u_2)-a(u_2, u_1-u_2) \geqslant \alpha\|u_1-u_2\|_V^2$，$\alpha$ 为常数；

（iv） $|b(u_1, v)-b(u_2, v)| \leqslant M(u_1, u_2)\|u_1-u_2\|_V\|v\|_H$ 其中 $M(u_1, u_2)$ 为 $V\times V$ 上有界泛函；

（V） 存在 $R>0$，$0<\beta<\alpha$ 使 $\forall v\in V$

$$|b(u, v)| \leqslant \beta\|u\|_V\cdot\|v\|_V, \quad \forall \|u\|_V \geqslant R.$$

记
$$S=\{u;\ u\in V,\ \|u\|_V\leqslant r,\ a(u, v)=b(u, v),\ \forall v\in V\},$$

$$S_n=\{u_n;\ u_n\in V_n,\ \|u_n\|_V\leqslant r,\ a(u_n, v_n)=b(u_n, v_n),$$
$$\forall v_n\in V_n\},$$

其中 $V_n\subset V$ 有限维且 $\{V_n\}$ 终归稠于 V，r 为某一足够大的数（参见定理3.18），则由定理3.18可证 S_n 及 S 非空且 $S_n\to S$.

具体例子如例3.20.

如果上述条件（V）不成立，这时利用定理3.19也可以得到相应的结论，在此不再详述，具体例子如例3.15.

3.5 光滑算子方程的投影解

本节讨论一类光滑算子方程的投影解. 仍然设 X, Y 为

Banach 空间，X_n，Y_n 分别为 X、Y 的有限维子空间，非线性算子 A：$X \to Y$，它的近似算子 A_n：$X_n \to Y_n$。方程

$$Ax = y, x \in X, y \in Y \tag{3.173}$$

的近似方程是

$$A_n x_n = y_n, x_n \in X_n, y_n \in Y_n. \tag{3.174}$$

引理3.24 假设算子 A 在球 $S = \{x \in X: \|x - x^\circ\| \leqslant \delta_0\}$ 内是 Fréchet 可微的，其中 δ_0 是某一正常数；并存在 $[A'(x^0)]^{-1} \in L(Y, X)$，$\|[A'(x^\circ)]^{-1}\| \leqslant b$；还存在 $q(0 \leqslant q < 1)$ 使得

$$\sup_{\|x - x^\circ\| \leqslant \delta_0} \|A'(x) - A'(x^\circ)\| \leqslant q/b, \tag{3.175}$$

$$\|Ax^\circ - y\| \leqslant \delta_0(1-q)/b, \tag{3.176}$$

则方程(3.173)有唯一的解 $x^* \in S$ 且有估计式

$$\frac{a}{1+q} \leqslant \|x^* - x^\circ\| \leqslant \frac{a}{1-q}, \tag{3.177}$$

其中 $a = \|[A'(x^\circ)]^{-1}(Ax^\circ - y)\|$，$b$ 为正数。

证 定义算子 F：$S \subset X \to Y$ 使

$$Fx = x - [A'(x^\circ)]^{-1}(Ax - y),$$

于是问题等价于讨论 F 的不动点。如果我们能证明 $FS \subset S$ 并且 $\|Fx_1 - Fx_2\| \leqslant q\|x_1 - x_2\|$，$\forall x_1, x_2 \in S$，那末问题将获得解决。

事实上，对任意 $x \in S$，有

$$\begin{aligned} Fx - x^\circ &= x - x^\circ - [A'(x^\circ)]^{-1}(Ax - y) \\ &= -[A'(x^\circ)]^{-1}\{[Ax^\circ - y] + [Ax - Ax^\circ - A'(x^\circ) \\ &\quad \times (x - x^\circ)]\}, \end{aligned}$$

根据条件(3.175)、(3.176)及 Fréchet 导数的性质（见附录三定理一），得

$$\|Fx-x^\circ\|\leqslant b\left(\frac{\delta_0(1-q)}{b}+\frac{q}{b}\|x-x^\circ\|\right)\leqslant\delta_0,$$

即 $Fx\in S$。又对任意 $x_1, x_2\in S$ 有

$$Fx_1-Fx_2=x_1-x_2-[A'(x^\circ)]^{-1}(Ax_1-Ax_2)$$

$$=-[A'(x^\circ)]^{-1}[Ax_1-Ax_2-A'(x^\circ)(x_1-x_2)],$$

$$\|Fx_1-Fx_2\|\leqslant b\frac{q}{b}\|x_1-x_2\|=q\|x_1-x_2\|,$$

于是存在 $x^*\in S$，使 $Ax^*=y$。

为证估计式(3.175)，注意

$$x^*-x^\circ=-[A'(x^\circ)]^{-1}(Ax^\circ-y)-[A'(x^\circ)]^{-1}$$

$$\times[Ax^*-Ax^\circ-A'(x^\circ)(x^*-x^\circ)],$$

故有 $\|x^*-x^\circ\|\leqslant a+b\cdot\frac{q}{b}\|x^*-x^\circ\|,$

$$\|x^*-x^\circ\|\geqslant a-b\cdot\frac{q}{b}\|x^*-x^\circ\|,$$

从而推得式(3.177)成立。

定理3.22 假定投影算子 P_n: $X\to X_n$, Q_n: $Y\to Y_n$ 满足

$P_n\xrightarrow{p}I$，$Q_n\xrightarrow{p}I$，且

（i） 方程(3.173)存在解 $x^*\in X$；

（ii） 算子 A 在 x^* 的邻域 $D=\{x:\ \|x-x^*\|\leqslant\delta,\ \delta>0\}$ 上 Fréchet 可微，$[A'(x^*)]^{-1}$ 在 Y 上存在且有界，并且 $\forall v_1, v_2\in D$

$$\|A'(v_1)-A'(v_2)\|_{L(X,Y)}\leqslant L\|v_1-v_2\|_X; \tag{3.178}$$

(iii) $Q_nA'(x^*)\xrightarrow{r}A'(x^*)$（离散地）；

则方程

$$Q_nAx_n=Q_ny,\ x_n\in X_n \tag{3.179}$$

在 x^* 的某邻域存在唯一解 $x_n^*\in X_n$，并有估计式

$$\|x_n^*-x^*\|\leqslant c\|P_nx^*-x^*\|. \tag{3.180}$$

证 记 $\overline{Q_nA'(x^*)}$ 为 $Q_nA'(x^*)$ 在 X_n 上的限制，由条件(ii)、(iii)和定理2.10推得存在 n_1，使 $n\geqslant n_1$ 时 $[\overline{Q_nA'(x^*)}]^{-1}$ 存在且

$$\|[\overline{Q_nA'(x^*)}]^{-1}\|\leqslant a,\ n\geqslant n_1.$$

由条件(ii)及定理2.2推得存在 n_2，使 $n\geqslant n_2\geqslant n_1$ 时 A 在 P_nx^* 处有 Fréchet 导数且 $[\overline{Q_nA'(P_nx^*)}]^{-1}$ 存在，并满足

$$\|[\overline{Q_nA'(P_nx^*)}]^{-1}\|\leqslant b,\ n\geqslant n_2, \tag{3.181}$$

其中 b 为常数。

设 $\|x_n-P_nx^*\|\leqslant\delta_0(\delta_0\leqslant\delta)$，$x_n\in X_n$，由式(3.178)及 $Q_n\xrightarrow{p}I$ 得，

$$\begin{aligned}\|Q_nA'(P_nx^*)-Q_nA'(x_n)\|&\leqslant\|Q_n\|\|A'(P_nx^*)-A'(x_n)\|\\&\leqslant C_QL_\delta\delta_0,\end{aligned}$$

其中 $\|Q_n\|\leqslant C_Q$，故存在 $q(0<q<1)$，当 $\delta_0<\dfrac{q}{c_QL_\delta b}$ 时，

$$\sup_{\|x_n-P_nx^*\|\leqslant\delta_0}(\|Q_nA'(P_nx^*)-Q_nA'(x_n)\|)\leqslant\frac{q}{b}. \tag{3.182}$$

又由 A 在 x^* 处的连续性，故当 $n\geqslant n_3\geqslant n_2$ 时

$$\|Q_nA(P_nx^*)-Q_ny\|=\|Q_nA(P_nx^*)-Q_nA(x^*)\|$$
$$\leqslant c_Q\|A(P_nx^*)-A(x^*)\|$$
$$\leqslant \delta_0(1-q)/b. \qquad (3.183)$$

现在将引理3.24应用于空间 X_n 与 Y_n，并用 P_nx^* 代替 x°，Q_nA 代替 A，Q_ny 代替 y，比较式(3.181)～(3.183)与引理3.24的条件，得知当 n 充分大时 在球 $S=\{x_n:\ x_n\in X_n,\ \|x_n-P_nx^*\|\leqslant\delta_0\}$ 内方程(3.179)有唯一解 $x_n^*\in X_n$，且

$$\|x_n^*-P_nx^*\|\leqslant\frac{b}{1-q}\|Q_nA(P_nx^*)-Q_ny\|$$
$$\leqslant d_Q\|A(P_nx^*)-A(x^*)\|$$
$$\leqslant d_Q\left(\int_0^1\|A'(x^*+t(P_nx^*-x^*))\|dt\right)$$
$$\times\|P_nx^*-x^*\|$$
$$\leqslant d_Q\left(\|A'(x^*)\|+\frac{1}{2}\delta_0L_\delta\right)\|P_nx^*-x^*\|$$
$$\leqslant M\|P_nx^*-x^*\|,$$

其中 M 为常数。由此推得

$$\|x_n^*-x^*\|\leqslant\|x_n^*-P_nx^*\|+\|P_nx^*-x^*\|$$
$$\leqslant c\|P_nx^*-x^*\|,$$

其中 c 为常数，此即式(3.180)。

例3.8 考虑积分方程

$$x(s)=\int_a^b k(s,t,x(t))dt+f(s),\quad a\leqslant s\leqslant b, \qquad (3.184)$$

其中 $k(s,t,x)$ 在 $a\leqslant s,t\leqslant b,\ -\infty<x<+\infty$ 上连续，$f(s)$ 在

$[a, b]$上也连续. 假定

（1）方程(3.184)存在解 $x^*(t)$；

（2）$k(s, t, x)$ 关于变元 x 在 $s, t \in [a, b]$, $|x - x^*| \leqslant \delta$（$\delta$ 为常数）上有连续的一阶、二阶偏导数，因而还是有界的；

（3）线性齐次方程

$$z(s) = \int_a^b H(s, t) z(t) dt, \quad H(s, t) = \frac{\partial k(s, t, x^*(t))}{\partial x}$$

只有零解；

（4）定义分片多项式插值投影 P_n: $C[a, b] \to C_n[a, b]$ 使得 $P_n x \to x$, $\forall x \in C[a, b]$, 其中 $C_n[a, b]$ 为 $C[a, b]$ 的 n 维子空间.

基于这些假设，应用定理3.22可以证明当 n 充分大时，(3.184)的投影方程

$$x_n(s) = \int_a^b P_n k(s, t, x_n(t)) dt + (P_n f)(s), \ x_n \in C_n[a, b] \tag{3.185}$$

在 x^* 的邻域存在解 $x_n^*(s) \in C_n[a, b]$, 而且 $x_n^*(s)$ 在最大模范数意义下收敛于 $x^*(s)$, 其近似解与原问题的解的误差由 $x^*(s)$ 的插值误差所控制.

事实上，如果将方程(3.184)写成算子形式：

$$x = Kx + f, \ x \in C[a, b], \ f \in C[a, b], \tag{3.186}$$

其中 K 即为式(3.184)中的积分算子. 显然这时 K: $C[a, b] \to C[a, b]$ 是全连续的，因而积分算子 H:

$$Hz = \int_a^b H(s, t) z(t) dt$$

在 $C[a, b]$ 上也是列紧的. 由条件（2）知 $A \equiv (I - K)$ 在 x^* 的

邻域的 Fréchet 导数存在且满足 Lipschitz 条件。由于 H 是列紧算子，故由条件(3)知 $A'(x^*)=(I-K)'(x^*)$ 的逆算子存在而且在 $C[a,b]$ 上有界。再由条件(4) $P_n \xrightarrow{p} I$ 且因 $K'(x^*)$ 是列紧的，故由式(3.57)，(1.39)推得

$$P_n A'(x^*) \xrightarrow{r} A'(x^*) \quad \text{（离散地）},$$

因此定理3.22的条件(i)～(iii)均成立。

例3.9 考虑积分微分方程

$$\begin{cases} u''(t)+\int_0^1 k(s,t,u(s))ds=f(t), \; 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{3.187}$$

其中 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，而 $k(s,t,u)$ 关于 (s,t,u) 在 $[0,1]\times[0,1]\times(-\infty,+\infty)$ 上连续。式(3.187)可表写为

$$Au+Ku=f, \; u\in X, \; f\in Y, \tag{3.188}$$

其中
$$X=\{u: \; u\in C^2[0,1], u(0)=u(1)=0\},$$

$$\|u\|_X=\max(\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty, \|u''\|_\infty), \quad \forall u\in X,$$

$$Y=C[0,1], \; \|f\|_Y=\|f\|_\infty, \quad \forall f\in Y,$$

而

$$Au=\frac{d^2u}{dt^2}, \quad Ku=\int_0^1 k(s,t,u(s))ds. \tag{3.189}$$

求(3.187)的解，即是求算子方程(3.188)的解。

(i)假定 $k(s,t,u)$ 关于 u 连续可微，且

$$|k(s,t,u_1)-k(s,t,u_2)|\leqslant a(s,t)|u_1-u_2|, \tag{3.190}$$

$$|k'_u(s,t,u_1)-k'_u(s,t,u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|, \tag{3.191}$$

其中 $\alpha(s,t)\geqslant 0$，$\max\limits_{0<t<1}\int_0^1 \alpha(s,t)ds<\frac{1}{2}$，$L$ 为常数。(3.192)

(ii)记Δ：$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 为$[0,1]$上的均匀分割。在空间 $Y=C[0,1]$上，象我们已经多次用过的，采用分片线性插值的方式以定义投影算子 Q_n：$Y\to Y_n$，显然，这时 $Q_nv\to v$，$\forall v\in C[0,1]$。在空间 X 上，采用三次样条插值以定义投影算子 P_n：$X\to X_n$。具体说来，记 $S(3,3;\Delta)=\{S(x)$：$S\in W_\infty^3[0,1]$；$s(x)\in\Pi_3$，对 $x\in(x_i,x_{i+1})$，$0\leqslant i\leqslant n-1\}$，其中 $s\in W_\infty^3$ 表示 $s\in C^2[0,1]$ 且有三阶的分片连续导数；Π_3 表示次数不超过3次的多项式集合。记 $X_n=\{u_n$：$u_n\in S(3,3,\Delta)$，$u_n(0)=u_n(1)=0\}$。定义投影算子 P_n：$X\to X_n$ 使之满足

$$(P_nu-u)(x_i)=0,\ 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$D(P_nu-u)(x_i)=0,\ i=0,n.$$

可以证明[31]，这时 $P_nu\to u$，$\forall u\in X$。

根据这些假设，不难看出算子 $A=\frac{d^2}{dt^2}$：$X\to Y$ 是线性有界的，它的范数$\|A\|\leqslant 1$，而且 A^{-1} 存在且 $\|A^{-1}\|\leqslant 1$。因

$$A^{-1}u=-\int_0^1 k(s,t)u(s)ds,$$

$$k(s,t)=\begin{cases} s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

故有，$\|A^{-1}u\|_\infty\leqslant\frac{1}{8}\|u\|_\infty$，$\|(A^{-1}u)'_t\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_\infty$，

$$\|(A^{-1}u)''_{tt}\|_\infty=\|u\|_\infty,$$

即 $$\|A^{-1}u\|_X\leqslant\|u\|_Y.$$

记 $A^{-1}f-A^{-1}Ku\equiv Tu$，于是式(3.188)等价于

$$u = Tu, \tag{3.193}$$

并由条件(3.190)及(3.192)知算子T是具有压缩因子为$q=\max\limits_{0<t<1}\int_0^1 \alpha(s,t)ds<1$的压缩算子，从而3.188)有唯一解$u^* \in X$。

显然式(3.189)中的算子K：$X\to Y$是列紧的。故$K'(u^*)$也是列紧的。记算子F：$X\to Y$为

$$Fu \equiv Au + Ku, \quad u \in X,$$

由(3.191)知$F'(u)$满足Lipschitz条件的。

现在需要证明$F'(u^*)^{-1}$存在有界。由式(3.190)知$|k_u(s,t,u^*)| \leqslant \alpha(s,t)$，从而

$$\|K'(u^*)\| \leqslant \max_{0<t<1}\int_0^1 \alpha(s,t)dt,$$

$$\|A^{-1}K'(u^*)\| \leqslant q < 1,$$

所以$I + A^{-1}K'(u^*)$的逆存在且有界，于是得$A + K'(u^*) = F'(u^*)$的逆存在且有界。算子$F'(u)$满足Lipschitz条件可由(3.191)得知。

最后需要证明$Q_nF'(u^*) \xrightarrow{r} F'(u^*)$(离散地)。采用例2.16的作法可证：$Q_nA \xrightarrow{r} A$(离散地)。又因$K'(u^*)$是列紧的，而且$Q_n \xrightarrow{p} I$，故由式(3.57)推得$Q_nK'(u^*) \xrightarrow{ac} K'(u^*)$，由式(1.37)得

$$Q_nA + Q_nK'(u^*) \xrightarrow{r} A + K'(u^*) \text{（离散地）}.$$

应用定理3.22，方程(3.188)的近似方程

$$Q_n A u_n + Q_n K \bar{u}_n = Q_n f,\ u_n \in X$$

当 n 充分大以后存在解，其解收敛于式(3.188)，即(3.187)的解。

具体的数值例子如例3.16.

上述例子启示我们，不多的推导便可以将定理3.22推广到一般当方程(3.173)的右端是一个列紧的非线性算子情形，即

定理3.23 假定投影算子 P_n: $X \to X_n$，Q_n: $Y \to Y_n$ 满足 $\xrightarrow{p} I$，$Q_n \xrightarrow{p} I$；A、B：$X \to Y$ 为非线性算子，B 还是全续的，且

(i) 方程 $Ax = Bx$ 存在解 $x^\circ \in X$；

(ii) 算子 A、B 在 x° 的邻域 $D = \{x: \|x - x^\circ\| \leqslant \delta, \delta > 0\}$ 上 Fréchet 可微，并存在有界的 $[A'(x^\circ)]^{-1} \in L(Y, X)$，$\|[A'(x^\circ)]^{-1}\| \|B'(x^\circ)\| < 1$；$\forall v_1, v_2 \in D$ 有

$$\|A'(v_1) - A'(v_2)\|_{L(X,Y)} \leqslant L_\delta \|v_1 - v_2\|_X,$$

$$\|B'(v_1) - B'(v_2)\|_{L(X,Y)} \leqslant m_\delta \|v_1 - v_2\|_X,$$

其中 L_δ，m 为常数；

(iii) $Q_n A'(x^\circ) \xrightarrow{r} A'(x^\circ)$（离散地）

则方程 $Q_n A x_n = Q_n B x_n$，$x_n \in X_n$

在 x° 的邻域存在唯一解 $x_n^\circ \in X_n$，并有估计式

$$\|x_n - x_n^\circ\| \leqslant c \|P_n x^\circ - x^\circ\|,$$

其中 c 为常数。

证 为要论证结论成立，由

$$Q_n B'(x^\circ) \xrightarrow{cc} B'(x^\circ)$$

因而

$$Q_nA'(x^\circ)-Q_nB'(x^\circ)\xrightarrow{r}A'(x^\circ)-B'(x^\circ)\quad(\text{离散地}).$$

由于 $\|[A'(x^\circ)]^{-1}\|\|B'(x^\circ)\|<1$，从而存在 $[A'(x^\circ)-B'(x^\circ)]^{-1}\in L(Y,X)$，由定理3.22推得结论成立。

利用定理 3.23 可以讨论诸如 $a(u,v)=b(u,v)$ 类型的变分问题的近似解，在此我们不再细论。

关于光滑算子方程的投影解的讨论，读者还可以参考[5]，[15]，[30]，[31]及其引文。

3.6 求投影解的变分方法

数学物理中的有些问题，也可以转化为某一泛函的极值问题。本节我们将证明，解位势算子方程可以转化为泛函的极值问题，其投影解可以转化为求所述泛函在有限维空间的极值问题。整个这节，假定 X 是自反 Banach 空间，$X_n\subset X$ 是有限维子空间，P_n: $X\to X_n$ 是投影算子。

下面将从泛函取得极小值的必要条件入手开始我们的讨论。

假定泛函 f: $X\to R$ 于集合 $\Omega\subset X$ 中是 Gateaux 可微的，并记 $Df(x_o,h)$ 为 f 在 x_o 处沿增量 h 的 Gateaux 微分，如果 Gateaux 微分 $Df(x_o,h)$ 是线性有界泛函，即

$$Df(x_o,h)=\langle Df(x_o),h\rangle=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x_o+\lambda h)-fx_o)}{\lambda}\quad(h\in X),\tag{3.194}$$

则称 $Df(x_o)$ 为泛函 f 在点 x_o 的**梯度**(或称**弱梯度**)，记为 $Df(x_o)=\mathrm{Grad}\,f(x_o)$。如果 f 还是 Fréchet 可微的，则称它为 $f(x)$ 在 x_o 的**强梯度**。为区别起见，将强梯度记为 $f'(x_o)=\mathrm{grad}\,f(x_o)$。显然，泛函 $f(x)$ 在 x_o 的梯度(强或弱)是映 $X\to X^*$ 的算子。

简单的例子，设 H 是实 Hilbert 空间，如 $f(x)=\|x\|^2$，则因 $f(x+\varepsilon y)-f(x)=2\varepsilon(x,y)+\theta(\varepsilon^2)$，$\varepsilon\to 0$，因此 $\forall x\in H$，f 是 Gateaux 可微的而且 $\mathrm{Grad}\, f(x)=2x$。由于 $\mathrm{Grad}\, f$ 是连续的，因此 f 在 H 上也是 Fréchet 可微的。

值得注意的是，同一个泛函，其梯度在不同的空间可能不一样，例如

$$f(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)\,dt,$$

当 $H=L^2(\Omega)$ 时，有 $Df(u,h)=\int_\Omega u(t)h(t)\,dt$，于是在 $L^2(\Omega)$ 中 $\mathrm{Grad}\, f(u)=\mathrm{grad}\, f(u)=u$。

又若 $H=H_0^1(\Omega)$，同样有 $Df(u,h)=\int_\Omega u(t)h(t)\,dt$，同时 $\forall h\in H_0^1(\Omega)$，由于

$$\left|\int_\Omega u(t)h(t)\,dt\right|\leqslant\|u\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\leqslant\|u\|_{L^2}\|h\|_{H_0^1},$$

它又是 H_0^1 上的有界线性泛函，因此存在 $w\in H_0^1$ 使得

$$\int_\Omega u(t)h(t)\,dt=(w(u),h)_{H^1}=\int_\Omega(w\cdot h+w_t\cdot h_t)\,dt,\quad\forall h\in H_0^1,$$

从而推得 f 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是 Fréchet 可微的，但是此时 $\mathrm{grad}\, f(u)=w(u)$。

假定 f 是 X 上的实泛函，点 $x_0\in X$ 称之为**局部极小点**（**极大点**），如果存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得当 $x\in U(x_0)$ 时

$$f(x)\geqslant f(x_0)\ (\text{相应地 } f(x)\leqslant f(x_0)). \qquad (3.195)$$

设 f 在点 x_0 是 Gateaux 可微的，点 x_0 称为 f 的**临界点**（或

稳定点，如果

$$\operatorname{Grad} f(x_o)=0. \qquad (3.196)$$

定理3.24 设 f 为定义在 $\Omega\subset X$ 上的实泛函，$x_o\in\Omega$ 为其内点，假定 f 在 x_o 处梯度存在，则当 x_o 为 f 的局部极小（或极大）点时，它一定也是 f 的临界点。

证 任取 $h\in X$，考虑函数 $\varphi(t)=f(x_o+th)$，则因 x_o 为 Ω 的内点，φ 在 $t=0$ 的邻域有定义而且 φ 在 $t=0$ 处是可微的，

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_o+th)-f(x_o)}{t}=Df(x_o,h)$$

$$=\langle \operatorname{Grad} f(x_o),h\rangle,$$

如果 x_o 是 f 的极小（或极大）点，则 $t=0$ 是 φ 的极小（或极大）点，因此 $\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=0$，从而推得

$$\langle \operatorname{Grad} f(x_o),h\rangle=0,\quad \forall h\in X, \qquad (3.197)$$

因为 h 是 X 的任一元，故 $\operatorname{Grad} f(x_o)=0$，即 x_o 为临界点。

泛函 f: $X\to R$ 称为在 $x_o\in X$ 是**下半连续**的（相对地，**上半连续**），如果对任一序列 $\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x_o$ 有

$$f(x_o)\leqslant\liminf_{n\to\infty} f(x_n)\quad（相应地\ f(x_o)\geqslant\limsup_{n\to\infty} f(x_n)）. \qquad (3.198)$$

如果式(3.198)对任何 $x_n\rightharpoonup x_o$ 也成立，则称 f 于 x_o **弱下(上)半连续**。

定理3.25 设 f 为定义在自反 Banach 空间 X 中的实泛函，如果 f 满足

（i） $f(x)\to+\infty$，对 $\|x\|\to+\infty$ 一致地；

（ii） f 弱下半连续；

则 f 是下有界的，而且在某点 $x_0\in X$ 达到下确界。又如果

(iii) f 在 x_0 梯度存在，

则 $\mathrm{Grad}\, f(x_0)=0$。

证 假若 f 不是下有界，则存在 $\{x_n\}$，$n\in N$ 使得 $f(x_n)\to-\infty(n\to\infty)$。由(i) $\{x_n\}$ 应是一致有界的，由于空间自反，因此存在列 $\{x_n\}$，$n\in N'\subset N$ 使得 $x_n\rightharpoonup x_0\in X$，并且 $f(x_n)\to-\infty$，$n\in N'\subset N$。由条件(ii)得知 $f(x_0)\leqslant \lim f(x_n)=-\infty$，这是不可能的，因而 f 是下有界的。

令 $\alpha=\inf\limits_{x} f(x)$，$\{x_n\}$ 为极小化列，即 $f(x_n)\to\alpha(n\to\infty)$。如同上面的道理，存在序列 $\{x_n\}$，$n\in N'\subset N$，使 $x_n\rightharpoonup x_0\in X$，$f(x_0)\leqslant\lim f(x_n)=\alpha$，由 α 的定义，$f(x_0)\geqslant\alpha$，故 $f(x_0)=\alpha$。

定理的最后一部分可以直接从定理3.24推得。

算子 F: $X\to X^*$ 称为集合 $\Omega\subset X$ 上的 **位势算子**（或**梯度算子**），如果存在 Gateaux 可微泛函 f: $\Omega\subset X\to R$ 使得

$$F(x)=\mathrm{Grad}\, f(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.199}$$

而泛函 f 称为 F 在 Ω 上的**位势**。如果 f 是 Fréchet 可微的，并且

$$F(x)=\mathrm{grad}\, f(x), \tag{3.200}$$

则 F 称之为**强位势算子**，而 f 称为 F 的**强位势**。

下面的定理揭示了位势的极小元就是位势算子方程的解。

定理3.26 设 T: $X\to X^*$ 是位势算子，即存在泛函 $t(x)$ 使 $T(x)=\mathrm{Grad}\, t(x)$，又设

(i) $t(x)$ 满足增长条件，即 $\dfrac{t(x)}{\|x\|}\to\infty$，当 $\|x\|\to\infty$（一致地），

(ii) $t(x)$ 弱下半连续，

则对任一 $g\in X^*$，存在 $x_0\in X$ 使

$$\inf_{x\in X} f(x) = f(x_0)$$

且

$$Tx_0 = g, \tag{3.201}$$

其中 $f(x) = t(x) - \langle g, x\rangle$.

证 因为

$$\operatorname{Grad} f(x) = \operatorname{Grad} t(x) - g = T(x) - g,$$

因此 f 的临界点即为 $Tx = g$ 的解. 为完成证明, 只需验证满足定理3.25的条件. 事实上, 如果令 $\tau(x) = \dfrac{t(x)}{\|x\|}$, 那末有

$$\begin{aligned} f(x) = t(x) - \langle g, x\rangle &\geqslant \tau(x)\|x\| - \|x\|\|g\| \\ &= [\tau(x) - \|g\|]\|x\|. \end{aligned}$$

根据假定, 当 $\|x\|\to\infty$ 时, $\tau(x)\to\infty$, 因此定理3.25的条件(i)满足; 又因 $t(x)$ 弱下半连续, $\langle g, x\rangle$ 于 X 上是弱连续的, 因此 f 也是弱下半连续, 从而定理得证.

现在转向讨论投影方程的解.

引理3.25 若 T: $X\to X^*$ 是位势算子而且 $\operatorname{Grad} t(x) = T(x)$, 则 $P_n^* T$: $X_n \to X_n^*$ 也是位势算子而且 $\operatorname{Grad} t(x_n) = P_n^* T(x_n)$, $x_n\in X_n$.

证 根据假定, 对任一固定的 $x_n\in X_n$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t(x_n+\varepsilon h_n)-t(x_n)}{\varepsilon} &= \langle Tx_n, h_n\rangle \\ &= \langle Tx_n, P_n h_n\rangle = \langle P_n^* T x_n, h_n\rangle, \quad h_n\in X_n, \end{aligned}$$

此即表明 $P_n^* T x_n = \operatorname{Grad} t(x_n)$.

定理3.27 若 T 满足定理3.26的条件, 则对任意 $g\in X^*$, 存在 $x_n\in X_n$ 使得

$$\inf_{y\in X_n} f(y) = f(x_n), \tag{3.202}$$

$$P_n^* T x_n = P_n^* g.$$

其中 $f(y) = t(y) - \langle P_n^* g, y\rangle \equiv t(y) - \langle g, y\rangle$, $y \in X_n$.

证 证明方法同定理3.26，只要注意 y 始终限制在 X_n 上。

前面已经见到，为了保证泛函 f 在某点取得下确界，泛函的弱下半连续的假定是本质的。我们要证明，如果位势算子是单调的，则位势必然是弱下半连续泛函。在(3.102)式中，如果 $\alpha = 0$，即当 $T: X \to X^*$ 满足

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in X, \tag{3.203}$$

则称 T 为**单调的**；如果上式中的等号只有 $x = y$ 时才成立，则称 T **严格单调**。显然，如果 T 强单调，则一定单调且严格单调。

泛函 f: $X \to R$ 称为在 X 上是凸的，如果

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y); \ \forall x, y \in X, t \in [0, 1]; \tag{3.204}$$

若式(3.204)中的等号只有在 $x = y$ 才成立，则称 f 为**严格凸的**。

定理3.28 设泛函 f: $X \to R$ 在 X 上是 Gateaux 可微的，则下述命题成立

(i) 如果 Grad$f$ 是单调的（严格单调的），则 f 是凸的（严格凸的），而且弱下半连续。

(ii) 若 f 是凸的（严格凸的），则 Grad$f$ 是单调的（严格单调的）。

证 记 $F(x) = \text{Grad} f(x)$，由于 F 是位势算子，于是由 Lagrange 公式，对任意 $x, x_0 \in X$

$$f(x) - f(x_0) = \langle F(x_0 + \tau(x - x_0)), x - x_0\rangle$$

$$= \langle F(x_0), x - x_0\rangle$$

$$+\langle F(x_0+\tau(x-x_0)), x-x_0\rangle$$

$$-\langle F(x_0), x-x_0\rangle,$$

其中，$0<\tau<1$. 由 F 的单调性

$$\langle F(x_0+\tau(x-x_0)), (x-x_0)\rangle-\langle F(x_0), x-x_0\rangle$$

$$=\frac{1}{\tau}\langle F(x_0+\tau(x-x_0))-F(x_0), \tau(x-x_0)\rangle\geqslant 0,$$

从而

$$f(x)-f(x_0)\geqslant\langle F(x_0), x-x_0\rangle. \qquad (3.205)$$

取$\{x_n\}$，使 $x_n\rightharpoonup x_0$，于是$\langle F(x_0), x_n-x_0\rangle\to 0(n\to\infty)$，因而得

$$f(x_n)-f(x_0)\geqslant\langle F(x_0), x_n-x_0\rangle\to 0 \quad (n\to\infty),$$

从而，$\liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)\geqslant f(x_0)$，即 f 为弱下半连续.

进一步证 f 是凸泛函(严格凸泛函)。为此设 $t\in(0,1)$，x, $y\in X$，由中值定理，存在 ξ, $\eta\in X$ 使

$$f(tx+(1-t)y)-f(x)=(1-t)\langle F(\xi), y-x\rangle,$$

$$\xi=\alpha x+(1-\alpha)y, t<\alpha<1,$$

$$f(y)-f(tx+(1-t)y)=t\langle F(\eta), y-x\rangle,$$

$$\eta=\beta x+(1-\beta)y, 0<\beta<t$$

根据 F 的单调性

$$\langle F(\xi)-F(\eta), \xi-\eta\rangle\geqslant 0 \quad (\text{或}>0),$$

$$\eta-\xi=(\beta-\alpha)(x-y)=(\alpha-\beta)(y-x), \alpha>\beta,$$

因此

$$\frac{f(x)-f(tx+(1-t)y)}{1-t}+\frac{f(y)-f(tx+(1-t)y)}{t}$$

$$\geqslant 0\ (或>0),\ t\in(0,1),\qquad (3.206)$$

于是得知 f 是凸泛函（或严格凸泛函）。

现在证明(ii)。考虑实变量的实值函数

$$\varphi(t)=f(y+th),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

这里 $h=x-y$, $x, y\in X$。由于 f 是 Gateaux 可微的且是凸的（或严格凸的），因此函数 $\varphi(t)$ 是凸的（或严格凸的），并且在(0, 1)上可微，于是 $\varphi'(t)$ 是增加的（或严格增的）。然而

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}f(y+th)=\langle F(y+th), h\rangle,$$

所以 $\langle F(x)-F(y), x-y\rangle=\varphi'(1)-\varphi'(0)\geqslant 0(或>0)$。

定理3.29 设 T: $X\to X^*$ 是位势算子而且函数 $\langle T(tx), x\rangle$ 对固定的 $x\in X$，当 $t\in[0,1]$ 时，关于 t 是连续的，且满足

(i) $\dfrac{\langle Tx,x\rangle}{\|x\|}\to\infty$，当 $\|x\|\to\infty$ 一致地成立，

(ii) T 是单调算子，

则对任意 $g\in X^*$，方程

$$Tx=g,\qquad (3.207)$$

$$P_n^*Tx_n=P_n^*g,\ x_n\in X_n\qquad (3.208)$$

存在解，而且可以通过求相应的位势的极小元而获得其解，即如果 x_0、x_n 分别满足

$$\inf_{x\in X}(t(x)-\langle g, x\rangle)=t(x_0)-\langle g, x_0\rangle,$$

$$\inf_{y\in X_n}(t(y)-\langle P_n^*g, y\rangle)=t(x_n)-\langle P_n^*g, x_n\rangle,$$

则 x_0、x_n 分别为式(3.207)，(3.208)的解，其中 $T(x)=\mathrm{Grad}\,t(x)$。

(iii) 如果 T 是严格单调的，则上述解 x_0、x_n 还是唯一的。

证 结论(iii)是明显的，为证明所有结论成立，根据定理3.26、3.27、3.28，只需验证当$\|x\|\to\infty$时，$\dfrac{t(x)}{\|x\|}\to\infty$就行了。事实上，由于$\langle T(sx), x\rangle$关于$s$是连续的，于是泛函$t(x)$可表示为（参看附录三）$t(x)=t(0)+\int_0^1\langle T(sx), x\rangle ds$。记$h(x)=\langle Tx, x\rangle/\|x\|$，于是，当$\|x\|$充分大以后

$$t(x)/\|x\|=t(0)/\|x\|+\int_0^1 h(sx)ds\geqslant t(0)/\|x\|+\int_{\frac{1}{2}}^1 h(sx)\,ds,$$

根据中值定理，存在$\sigma\in(\frac{1}{2}, 1)$，使

$$t(x)/\|x\|\geqslant t(0)/\|x\|+\tfrac{1}{2}h(\sigma x).$$

这里σ虽然与x有关，但当$\sigma>\frac{1}{2}$，$\|x\|\to\infty$时，$h(\sigma x)\to\infty$，因而结论成立。

到现在为止，我们只是证明了位势算子方程在一定条件下解及其投影解是存在的，而且其解可以通过求极小元而获得，我们还没有涉及投影解的收敛性问题，下面的引理3.26指出：式(3.208)的解$\{x_n\}$是一个有界序列。因此，若对算子T再附加一些假定，例如T满足强单调条件而且连续、有界，则$\{P_nT\}$是渐近正规的，因而由§3.4的有关正规算子方程的一般理论可得收敛性结论以及相应的误差估计，在此不再细述。下面我们将证明，如果假定位势是增长的、连续的、严格凸的，那末(3.208)式的解将弱收敛于原方程(3.207)的解。

为了下面的讨论，我们假定泛函$f(x)$在x_0点取得下确界d，即

$$d=f(x_0)=\inf_{x\in X}f(x).$$

我们知道序列 $\{x_n\}\subset X$ 称为泛函 f 的极小化序列，如果

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=d, \tag{3.209}$$

引理3.26 设 f 是 X 上的实泛函，满足

(i) $d=\inf\limits_{x\in X} f(x)=f(x_0)$，

(ii) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x)=+\infty$，

则任何极小化列都是有界的。

证 设$\{x_n\}\subset X$ 是极小化序列，如果不是有界的，则存在子列$\{y_m\}\subset\{x_n\}$，使得$\|y_m\|>m(m=1,2,\cdots)$。今假定 $m_0>d$，根据条件(ii)，可以选得$\{y_m\}$使

$$f(y_m)>f(y_{m_0})\geqslant m_0,\ m_1>m_0,\ m=m_1,m_1+1,\cdots$$

因此 $d=\lim\limits_{m\to\infty} f(y_m)\geqslant m_0>d$，

这一矛盾证明了引理正确。

现在假定子空间 $X_n\subset X_{n+1}$ 且 $\dim X_n=n$，$X=\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n}$。

引理3.27 假设 f 是 X 上的实泛函，满足

(i) $d=\inf\limits_{x\in X} f(x)=f(x_0)$，

(ii) $d_n=\inf\limits_{y\in X_n} f(y)=f(x_n)$，$n\in N$，

(iii) $f(x)$上半连续，

则$\{x_n\}$是极小化序列。

证 根据(i)$d=\inf\limits_{x\in X} f(x)$，我们假设 $\{u^{(n)}\}\subset X$ 是一个极小化列使得

$$f(u^{(n)})\leqslant d+\frac{1}{n},\ n\in N,$$

由于$X=\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n}$，于是对任何 $u^{(n)}$ 和任意正数 δ_n，存在元素

$v^{(m)} \in X_m$ 使得

$$\|v^{(m)} - u^{(n)}\| < \delta_n;$$

因为 f 上半连续，因此 δ_n 可以取得充分小，使得当 $u \in X$ 且 $\|u^{(n)} - u\| < \delta_n$ 时有 $f(u) \leqslant f(u^{(n)}) + \frac{1}{n}$，即

$$f(u^{(n)}) - f(u) \geqslant -\frac{1}{n}.$$

令 $u = v^{(m)}$，于是

$$f(v^{(m)}) \leqslant f(u^{(n)}) + \frac{1}{n} \leqslant d + \frac{2}{n}.$$

又由条件(ii)

$$f(x_m) = d_m = \inf_{y \in X_m} f(y),$$

于是 $$f(x_m) \leqslant f(v^{(\ )}) \leqslant d + \frac{2}{n}.$$

另一方面，由于 $f(x_m) \geqslant d$，于是

$$\lim_{m\to\infty} f(x_m) = d.$$

定理3.30 设 $T: X \to X^*$ 是位势算子，$T(x) = \mathrm{Grad}\, t(x)$，$t(x)$ 是自反 Banach 空间 X 上的实连续泛函，$\langle T(tx), x\rangle$ 关于 t 是连续的($t \in [0,1]$)，又设

(i) $\langle Tx, x\rangle / \|x\| \to \infty$（或 $t(x)/\|x\| \to \infty$） $(\|x\| \to \infty)$，

(ii) T 是严格单调的，

则方程(3.207)及(3.208)均存在唯一解；若分别记其解为 x_0、x_n $(n \in N)$，那末 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$。

证 由定理3.29知解 x_0，$x_n (n \in N)$ 存在且唯一，而且 x_0、x 分别为 f 在 X、X_n 上的极小元，其中 $f(x) = t(x) - \langle g, x\rangle$。

下一步证明，存在$\{x_n\}$的弱收敛于 x_0 的子列。事实上，由于 $f(x)=t(x)-\langle g,x\rangle$，根据 $t(x)$的连续性，故知 $f(x)$也是连续的。利用引理3.27，$\{x_n\}$是 $f(x)$的极小化序列。又根据引理3.26知$\{x_n\}$有界；由于 X 是自反的，因此存在子列 $\{y_m\}$，$m\in N'\subset N$，使 $y_m\rightharpoonup y_0\in X$。现在证明 $y_0=x_0$。事实上，由 T 的单调性知 $f(x)$是弱下半连续的，故

$$f(y_0)\leqslant \liminf_{m\to\infty} f(y_m)=\lim_{m\to\infty} f(y_m)=f(x_0),$$

因此由极小元的唯一性知 $y_0=x_0$。

进一步证明，整个序列$\{x_n\}$弱收敛于 x_0，若不然，则存在子列于$\{x_n\}\setminus\{y_m\}$，例如说$\{z_k\}$，$k\in N''\subset N$，它弱收敛于 $z_0\neq x_0$，与上面一样的作法有

$$f(z_0)\leqslant \liminf_{k\to\infty} f(z_k)=\lim_{k\to\infty} f(z_k)=f(x_0),$$

它又与唯一性相矛盾，定理得证。

一般情况，如果 $f(x)$是弱下半连续，而且 $f(x)$在空间 X 上存在下确界 d，又如果已知 $d_n=\inf\limits_{y\in X_n} f(y)=f(x_n)$且 $d_n\to d$，则$\{x_n\}$的任何弱收敛子列的极限均为 $f(x)$的极小点。事实上，设 x_0 是子列$\{x_{n_k}\}$的弱极限，并且 $f(x_0)>d+\varepsilon$，ε 为任意小的正数。选取 n_0，使 $n\geqslant n_0$ 时，$d_n<d+\varepsilon$，由于当 $n_k>n_0$时，$d_{n_k}<d+\varepsilon$，又由于 $f(x)$是弱下半连续的，故 $f(x_0)\leqslant d$，从而推得矛盾。

例3.10 考虑下述线性问题

$$\begin{cases} -\Delta u=g(x), & x\in\Omega \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3.210}$$

在 $H_0^1(\Omega)$上的广义解，这里Ω为 R^n 上的有界区域，$g(x)\in L^2(\Omega)$。

我们已经熟知(3.210)的变分方程是

$$a(u,v)=(g,v)_{L^2}\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),\tag{3.211}$$

其中
$$a(u,v)=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

$$(g,v)_{L^2}=\int_\Omega g(x)v(x)dx.$$

定义算子 A: $H_0^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 及 K: $L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 使

$$(Au,v)=a(u,v),$$

$$(Kg,v)=(g,v)_{L^2},$$

于是(3.211)式等价于

$$Au=Kg.$$

我们证明，算子 A 是泛函

$$t(u)=\frac{1}{2}(Au,u)\tag{3.212}$$

的强梯度．事实上，$\forall h\in H_0^1(\Omega)$，

$$t(u+h)-t(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial(u+h)}{\partial x_i}\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^2\right)dx$$

$$=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i}dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^2dx$$

$$=(Au,h)+\frac{1}{2}(Ah,h).$$

因 A 是线性有界算子，当 $\|h\|\to0$ 时，$|(Ah,h)|/\|h\|\to$)，所以

A 为位势算子且 $Au = \mathrm{grad}t(u)$。

显然 $t(u)$ 是满足定理3.30的一切假设条件的，因此我们可以由此而得到近似解的存在性、收敛性有关结论。

例3.11 考虑非线性边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & , x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.213}$$

的广义解，其中 Ω 为 R^n 中的有界区域，$g(x,z)$ 在 $\Omega \times R$ 上连续而且满足

$$|g(x,z_1) - g(x,z_2)| \leqslant \alpha |z_1 - z_2|, \quad \alpha < 1, \quad \forall z_1, z_2 \in R, \tag{3.214}$$

$$|g(x,z)| \leqslant a(x) + b|z|, \quad a(x) \in L^2(\Omega), \quad b > 0. \tag{3.215}$$

(3.213)的变分方程是

$$a(u,v) = (g,v)_{L^2}, v \in H_0^1(\Omega),$$

其中
$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$$(g,v)_{L^2} = \int_{\Omega} g(x,u(x)) v(x) dx.$$

这时可定义线性算子 A：$H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ 及非线性算子 B：$H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$，使

$$(Au,v) = a(u,v), \quad (Bu,v) = (g,v)_{L^2},$$

从而上述变分方程化为

$$(Au,v) = (Bu,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

这里内积均定义在 $H_0^1(\Omega)$ 上。于是问题化为求 $u \in H_0^1$，使

$$Au = Bu. \tag{3.216}$$

现在考虑泛函

$$\psi(u)=\int_\Omega dx\int_0^{u(x)}g(x,z)dz,\quad u\in H_0^1(\Omega), \tag{3.217}$$

由(3.215)式，$\psi(u)$在$L^2(\Omega)$有定义，因此在$H_0^1(\Omega)$也有定义。进一步可证明它存在 Fréchet 导数并且

$$d\psi(u)\cdot h=\int_\Omega g(x,u)h(x)dx,\quad u,h\in H_0^1(\Omega). \tag{3.218}$$

事实上，因

$$\begin{aligned}\omega(u,h)&=\psi(u+h)-\psi(u)-\int_\Omega g(x,u(x))h(x)dx\\&=\int_\Omega dx\left\{\int_u^{u+h}g(x,z)dz-g(x,u(x))h(x)\right\}\\&=\int_\Omega\left\{\int_0^1[g(x,u+th)-g(x,u)]dt\right\}h(x)dx,\end{aligned}$$

应用中值定理知，存在$\tau\in(0,1)$使

$$\omega(u,h)=\int_\Omega[g(x,u+\tau h)-g(x,u)]h(x)dx. \tag{3.219}$$

为了证明(3.218)式，需要证明

$$\lim_{\|h\|\to0}\frac{|\omega(u,h)|}{\|h\|}=0, \tag{3.220}$$

这里$\|h\|$取$H_0^1(\Omega)$意义下的范数。由(3.219)式

$$|\omega(u,h)|\leqslant\|g(x,u+\tau h)-g(x,u)\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|h\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.221}$$

又由(3.215)及§3.3的引理3.17知g: $L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$是连续

的，因此当$\|h\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$(同时有$\|h\|_{L^2(\Omega)}\to 0$)时

$$\|g(x,u+\tau h)-g(x,u)\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

从而得知(3.220)式成立。

现在令 $f(u)=t(u)-\psi(u)$，其中 $t(u)$ 由例3.10中的式(3.212)定义，从而得知

$$\operatorname{grad} f(u)=Au-Bu,\quad \forall u\in H_0^1(\Omega),$$

同时 $f(u)$ 也是连续的，又由(3.214)式

$$\begin{aligned}(Bu_1-Bu_2,v)&\leqslant\int_\Omega \alpha|u_1(x)-u_2(x)||v(x)|dx\\&\leqslant\alpha\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\&\leqslant\alpha\|u_1-u_2\|\|v\|,\quad\forall u_1,\ u_2,\ v\in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

故$(Bu_1-Bu_2,\ u_1-u_2)\leqslant\alpha\|u_1-u_2\|^2$，$\forall u_1,\ u_2\in H_0^1(\Omega)$ 因此 $Au-Bu$ 是强单调且连续的算子，同时

$$(Au-Bu,\ u)\geqslant(1-\alpha)\|u\|^2+(A0-B0,\ u),$$

$$\frac{(Au-Bu,u)}{\|u\|}\geqslant(1-\alpha)\|u\|+\frac{(A0-B0,u)}{\|u\|},$$

即
$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{(Au-Bu,u)}{\|u\|}\to+\infty.$$

应用定理3.30知(3.213)(或3.216)的解及投影解均存在，并且投影解弱收敛于原方程的解，由于 $Au-Bu$ 是强单调算子，因而也强收敛于原方程的解。

例3.12 考虑

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f, & x\in \Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3.222}$$

在$\mathring{W}_p^1(\Omega)$中的广义解，其中 Ω 为 R^n 中的有界区域，$p>2$($p=2$时，即为例3.10的(3.210)).$f\in L_q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，而

$$\|\nabla u\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3.222)的变分方程为

$$a(u,v)=f(v),\quad u,v\in\mathring{W}_p^1(\Omega), \tag{3.223}$$

其中 $a(u,v)=\int_\Omega \|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx$,

$$f(v)=\int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

类同于过去所采用的方法，定义算子A: $\mathring{W}_p^1(\Omega)\to(\mathring{W}_p^1(\Omega))^*$ 及 B: $L^q(\Omega)\to(\mathring{W}_p^1(\Omega))^*$，这里的$(\mathring{W}_p^1(\Omega))^*$为$\mathring{W}_p^1$的对偶空间.

$$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx,$$

$$\langle Bf,v\rangle=\int_\Omega f(x)v(x)\,dx,$$

于是(3.223)式等价于

$$Au=Bf,\quad u\in\mathring{W}_p^1(\Omega). \tag{3.224}$$

在本例中，定义 v 的范数为

$$\|v\| = \left(\int_\Omega \|\nabla v\|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

显然，它与 $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ 中的范数是等价的. 另外，我们知道 $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ 是自反 Banach 空间.

我们证明 A 是位势算子，而且其位势为

$$t(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \|\nabla u\|^p dx.$$

为证明这点，记 $F(\xi) = \frac{1}{p}\|\xi\|^p$, $\xi \in R^n$, 因此有

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} F(\xi) = \|\xi\|^{p-2}\xi_i,\quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} F(\xi) = (p-2)\|\xi\|^{p-4}\xi_i\xi_j + \|\xi\|^{p-2}\delta_{ij},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,$$

$$F(\xi+\eta) - F(\xi) = \|\xi\|^{p-2}\xi \cdot \eta + \omega(\xi, \eta),$$

$|\omega(\xi, \eta)| \leqslant c(p)(\|\xi\| + \|\eta\|)^{p-2}\|\eta\|^2$, $c(p)$ 为常数，从而

$$\int_\Omega F(\nabla(u+h)(x))dx - \int_\Omega F(\nabla u(x))dx$$

$$= \int_\Omega \|\nabla v\|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h dx + \omega(u, h),$$

这里 $|\omega(u,h)| \leqslant c(p)\int_\Omega (\|\nabla u\| + \|\nabla h\|)^{p-2}\|\nabla h\|^2 dx$, 另一方面

$$\left|\int_\Omega \|\nabla u\|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h dx\right| \leqslant \|u\|^{p-1}\|h\|,$$

因此对于固定的 $u\in\mathring{W}_p^1(\Omega)$

$$\langle Au, h\rangle=\int_\Omega \|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla h dx$$

是线性有界泛函. 又由 Hölder 不等式

$$\int_\Omega (\|\nabla u\|+\|\nabla h\|)^{p-2}\|\nabla h\|^2 dx\leqslant(\|u\|+\|h\|)^{p-2}\|h\|^2,$$

从而 $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{|\omega(u,h)|}{\|h\|}=0$,

这样
$$Au=\operatorname{grad} t(u),$$

因而 $t(u)$ 也是连续的. 由于 $t(u)=\dfrac{1}{p}\|u\|^p$, 所以

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{t(u)}{\|u\|}=\infty.$$

现在证明 $t(u)$ 是严格凸泛函. 为此目的, 对每一对不同的 $u, v\in\mathring{W}_p^1(\Omega)$, 设 $\widetilde{\Omega}=\{x\in\Omega, \nabla u\neq\nabla v\}$ 并使 $\widetilde{\Omega}$ 的测度大于0, 于是当 $\theta\in(0, 1)$ 时

$$\int_\Omega F(\theta\nabla u+(1-\theta)\nabla v)dx$$

$$=\int_{\widetilde{\Omega}} F(\theta\nabla u+(1-\theta)\nabla v)dx+\int_{\Omega-\widetilde{\Omega}} F(\theta\nabla u+(1-\theta)\nabla v)dx.$$

另一方面, 因为实函数 $|s|^p$ 于 R 上是严格凸的, 因此当 $x\in\widetilde{\Omega}$ 时.

$$F(\theta\nabla u+(1-\theta)\nabla v)<\theta F(\nabla u)+(1-\theta)F(\nabla v),$$

而当 $x \in \Omega - \widetilde{\Omega}$ 时

$$F(\theta\nabla u + (1-\theta)\nabla v) = \theta F(\nabla u) + (1-\theta)F(\nabla v),$$

从而推得 $t(u)$ 是严格凸的。利用定理3.28 得知算子 A 是严格单调的。又由算子 A 的定义，知 $\langle A(tu), u\rangle$ 关于 t 是连续的。

基于以上分析，算子 A 满足定理 3.30 的一切要求，从而获得解及投影解的存在性及收敛性结论。

应用变分方法求微分方程近似解更一般性的例子可以在 С. Г. Михлин 的《变分方法的数值实现》一书中找到[19]。从我们列举的例子以及(3.197)都可以看出，一般说来，对于非线性算子方程 $Au = f$，如果算子 T: $X \to X^*$ 是某一泛函 $t(u)$ 的梯度，其中 $Tu = Au - f$，那末当 u_0 为 $t(u)$ 的临界点时，必然导得

$$\langle Au_0 - f, h\rangle = 0, \qquad \forall h \in V,$$

因此，泛函求临界点，本质上也是求算子方程的弱形式的解。

3.7 解投影方程的数值实现

与线性问题的情况相比，求非线性投影方程的解要复杂和困难得多。一旦子空间选定后，投影方程就转化为非线性代数方程组的求解问题了，其求解的一般方法在 J. M. Ortega 与 W.C. Rheinboldt 的《多元非线性方程组迭代解法》一书（有中译本，科学出版社，1983）中有较为详尽的叙述。这里我们从算子方程的角度介绍某些投影解的比较典型的数值实现方法，其中包括牛顿法、压缩迭代法、单调(算子)迭代法以及同伦不动点算法。有关这类方法的深入论述拟另外再讨论。此外，梯度法也是常用方法之一，本书未能涉及，可以参看[10]、[6]。

牛顿法是目前常用的方法之一。如果 T: $X \to Y$ 于 X 上 Fréchet 可微，那末方程 $Tu = 0$ 的投影方程

$$P_n T u_n = 0,\ u_n \in X_n \tag{3.225}$$

的解可按下述牛顿迭代程序从初始值 u_n^0 出发确定$\{u_n^j\}$，$j=1,2,\cdots$为其近似解：

$$P_n T'(u_n^j)(u_n^{j+1} - u_n^j) = -P_n T(u_n^j). \tag{3.226}$$

如果 $X = Y$ 均为 Hilbert 空间 H 时，(3.226)式又可以写为

$$(T'(u_n^j)(u_n^{j+1} - u_n^j), v_n) = -(T(u_n^j), v_n),\ v_n \in H_n. \tag{3.227}$$

这种方法的特点是，先建立投影的非线性方程，然后用牛顿法求非线性方程组的解，而且迭代过程始终在空间 X_n 或 H_n 上进行，我们简称它为**牛顿投影法（NP 法）**。另一种方法是先将非线性方程用牛顿法化为线性方程，然后用投影法求其近似解，即设原方程为 $Tu=0$，采用牛顿法，从某一初值 v_0 出发，由方程

$$T'(v_n)(v_{n+1} - v_n) = -T(v_n) \tag{3.228}$$

确定 v_n，在确定 v_n 的过程中将由投影方式求出其近似解。这种方法与上一种方法不同之处在于每一步迭代过程中，方程(3.228)的投影方程可以不取同样维数的近似子空间。因此，当开始在精度要求不高的情况下，采用低维投影方程可以大大减少计算量。我们称这种方法为**投影牛顿法(PN法)**。如果每一步迭代过程中，其投影近似子空间均保持不变，恒取 NP 法中的 H_n 且 $v_0 = u_n^0$，那末 PN 法与 NP 法是一致的。无论是采用 NP 法还是采用 PN 法，从理论角度讲，都必须要求算子满足牛顿迭代法收敛的有关条件，在此，我们不打算细论。

例3.13 考虑积分方程

$$u(t) = \int_0^1 e^{ts} e^{-[u(s)]^2} ds + \sqrt{t} - \frac{1}{t-1}[e^{t-1} - 1],\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

这一方程的准确解是 $u(t) = \sqrt{t}$。本例显然满足定理 3.6 的条

件，现在用 NP 法求数值解，其中投影方式采取配置法的投影，而迭代过程采用拟牛顿过程。

我们将[0, 1] 用 t_i, $i=1, 2\cdots, n$分为 $n-1$ 等分，并取山形函数 $e_i(s)$, $i=1, 2, \cdots, n$(见(2.24)) 为其 n 个基函数。又令近似解为

$$u_n(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i e_i(s),$$

因此其投影方程为非线性方程组(见(3.87))

$$c_i-\sum_{j=1}^{n} w_j{}^{t_i s_j}e^{-(c_j)^2}=\sqrt{t_i}-\frac{e^{t_i-1}-1}{t_i-1}\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

其中，$\{t_i\}=\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1}(=1)\right\}$,

$$\{s_j\}=\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1}(=1)\right\},$$

$$\{w_j\}=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right), \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)\right\},$$

于是上式化为

$$c_i-\left(\frac{e^{-c_1^2}}{2(n-1)}+\frac{e^{-c_2^2}}{n-1}e^{\frac{t_i}{n-1}}+\frac{e^{-c_3^2}}{n-1}e^{\frac{2t_i}{n-1}}+\cdots+\frac{e^{-c_{n-1}^2}}{n-1}e^{\frac{(n-2)t_i}{n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-c_n^2}}{2(n-1)}e^{t_i}\right)-\sqrt{t_i}+\frac{e^{t_i-1}-1}{t_i-1}=0,\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

取 $n=10$，初值为

0.05,　0.3833,　0.5214,　0.6273,　0.7166

0.7953,　0.8664,　0.9319,　0.9928,　1.05.

应用公式（3.226)采用拟牛顿法经过五次迭代算得结果如下表：

表1

坐标	c_i	迭代解	准确解
0	c_1	0.000565	0
1/9	c_2	0.33378	0.3333333
2/9	c_3	0.47174	0.4714045
3/9	c_4	0.57759	0.5773502
4/9	c_5	0.66682	0.6666666
5/9	c_6	0.74542	0.745355
6/9	c_7	0.81650	0.81649
7/9	c_8	0.88186	0.881917
8/9	c_9	0.94272	0.942809
1	c_{10}	0.99999	1

例3.14 考虑积分方程

$$u(x)=\int_0^1\left[2x+\frac{1}{3}-2xu(y)-u^2(y)\right]dy$$

的投影解. 此方程有两解 $u=x$ 及 $u=5x-4$.

将上述方程写为算子形式便是 $u=Ku$, 其中 K 代表积分算子. 可以证明, K 是 $L^2(0,1)$ 上的列紧算子[16], 而且是连续的. 现将$[0,1]$等分为 n 份, 结点取为 $x_i=ih$, $h=1/n$, $i=0,1,\cdots,n$. 又取$\{\varphi_i(x)\}$, $i=0,1,\cdots,n$ 为山形函数, 它们组成分片线性插值函数空间 H_n 的基, $H_n\subset H=L^2$. 令

$$u_n=\sum_{i=0}^n u_i\varphi_i(x),$$

得到 Галеркин 方程为

$$\sum_{i=0}^n u_i\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx+2\int_0^1 x\varphi_j(x)dx\left(\sum_{i=0}^n u_i\int_0^1\varphi_i(y)dy\right)$$
$$+\int_0^1\varphi_j(x)dx\int_0^1\left(\sum_{i=0}^n u_i\varphi_i(y)\right)^2dy$$

$$= 2\int_0^1 x\varphi_j(x)dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \varphi_j(x)dx, \quad i=0, 1, \cdots, n.$$

将(2.24)式中 $\varphi_i(x)$的具体形式代入得一非线性代数方程组。用牛顿法求其解，其结果列入下表（误差为10^{-5}）：

表 2

x	真解 $u=x$	初值	迭代解	真 解 $u=5x-4$	初值	迭代解
0	0	0	-0.307531×10^{-6}	-4	-4.25	-4.00000
0.1	0.1	0	0.10000	-3.5	-3.75	-3.50001
0.2	0.2	0.1	0.20000	-3.0	-3.25	-3.00000
0.3	0.3	0.2	0.30000	-2.5	-2.75	-2.50000
0.4	0.4	0.3	0.40001	-2	-2.25	-2.00000
0.5	0.5	0.4	0.50001	-1.5	-1.75	-1.50000
0.6	0.6	0.5	0.60001	-1.0	-1.25	-1.00000
0.7	0.7	0.6	0.69999	-0.5	-0.75	-0.50002
0.8	0.8	0.7	0.80002	0	-0.05	-0.496504×10^{-5}
0.9	0.9	0.8	0.90000	0.5	0.25	0.499997
1.0	1.0	0.9	1.00000	1.0	0.75	1.00000

由于 K 是全连续算子，根据定理3.4，近似解收敛于原解。

例3.15 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + (x^4+1)u = u^3 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0<x<1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

的 Галеркин 解。此例可以看成定理3.19的一个应用。

上述问题的变分方程为

$$a(u, v) = (f(u, x), v), \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

其中， $a(u,v)=\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+(x^4+1)u\right)vdx,$

$$(f(u,x),v)=\int_0^1 f(u,x)\,vdx,$$

$$f(u,x)=u^3+2x^5-3x^4+x^3+x^2-x-2.$$

在子空间 $H_n\subset H_0^1(0,1)$的 NP 迭代格式为

$$a(u_n^{j+1}-u_n^j,v_n)-(f'_u(u_n^j,x)(u_n^{j+1}-u_n^j),v_n)$$

$$=-a(u_n^j,v_n)+(f(u_n^j,x),v_n),$$

整理后得

$$a(u_n^{j+1},v_n)-3((u_u^j)^2u_n^{j+1},v_n)$$

$$=(f(u_n^j,x),v_n)-(2(u_n^j)^3,v_n),$$

$$v_n\in H_n.$$

现用 $t_i(i=0,1,\cdots,16)$十六等分(0, 1)，并取 H_n 为分片线性插值函数空间，其基函数为山形函数，于是 $\dim H_n=17$，以 $u_n^0=0$ 为初始值，通过16次迭代后得到 u_n^{17} 在 $t_i(i=1,2,\cdots,15)$ 点的值见表 3（其中 $t_i=i/16$）。

表 3

i	近似解	i	近似解	i	近似解
1	−0.05861168	6	−0.23444264	11	−0.21491536
2	−0.10940795	7	−0.24616541	12	−0.18756671
3	−0.15238887	8	−0.25007430	13	−0.15239987
4	−0.18755469	9	−0.2461918	14	−0.10941744
5	−0.21490580	10	−0.23444965	15	−0.05861767

此题真解为 $u=x(x-1)$，真解在 x_i 上的值见例 3.17 所列的表。计算实践表明，如果采用 PN 法迭代，对于本题也可以得到

类同 NP 法一样的计算精度. 根据定理 3.19, 近似解收敛于真解.

例3.16 考虑积分微分方程

$$\begin{cases} u''(t) + \int_0^1 st^2u^2(s)ds = \frac{1}{60}t^2 - 2, \quad 0<t<1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

的配置解. 显然它是例3.9的特殊情况, 它有真解 $u(t) = t(1-t)$, 今取 $n = 10$, 并选用三次 B- 样条作为近似空间 X_n (参看例3.9) 的基函数, 用配置法得到配置方程后通过牛顿迭代法求解, 得出结果列表如下

表 4

坐标 $x=$	近似解	真解	坐标 $x=$	近似解	真解
0.1	0.08999139	0.09	0.6	0.23999691	0.24
0.2	0.15999800	0.16	0.7	0.20999718	0.21
0.3	0.20999736	0.21	0.8	0.15999776	0.16
0.4	0.23999697	0.24	0.9	0.08998722	0.09
0.5	0.24999660	0.25	1	-0.74505806×10^{-8}	0

牛顿法要求算子光滑, 且对初值的选取要求接近于真解. 如果算子是压缩的, 可以采用下面介绍的迭代法.

设 A: $H\to H$ 是压缩的, 那末方程 $u = Au$ 的投影解 u_n 的近似值可按下述程序

$$u_n^{j+1} = P_n A u_n^j, \quad u_n^0 \in H_n \text{ 为初值} \tag{3.229}$$

进行迭代而得到. 上述格式也可改写为

$$(u_n^{j+1}, \varphi) = (Au_n^j, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_n, \tag{3.230}$$

这样经过 l 次迭代以后得到 u_n^l, 不难算得

$$\|u_n^l - u^*\| \leqslant \frac{2-\alpha^l}{1-\alpha}\|u_n^0 - Au_n^0\|,$$

其中 u^* 为真解，α 为压缩因子。

正如§3.1所见到的，如果算子 A: $H \to H$ 满足(3.6)，(3.7)时，方程 $Au=f$ 的解可以化为压缩算子的不动点问题，特别当(3.6)、(3.7)式中 $N(r)=\beta>0$，$M(r)=\alpha>0$ 为常数时，即 A 在 H 上既满足具有常数为 α 的强单调性条件，又满足以 β 为常数的 Lipschitz 条件时，方程 $Au=f$ 的投影解 u_n 可以通过迭代格式

$$u_n^{j+1} = u_n^j - lP_n(A(x_n^j) - f) \tag{3.231}$$

而获得近似解，其中 $l\in(0, 2\alpha/\beta^2)$. 式(3.231)也可以改写为

$$(u_n^{j+1}, \varphi) = (u_n^j, \varphi) - l(A(x_n^j) - f, \varphi), \varphi\in H_n. \tag{3.232}$$

又如果(3.6)、(3.7)式中，$\beta=1$，$\alpha=0$，此时求方程

$$u + Au = f, \qquad f\in H$$

的投影解的迭代格式可以取为

$$u_n^{j+1} = (1-t_j)u_n^j + t_jP_nSu_n^j, \tag{3.233}$$

其中 $Su=f-Au$，$0\leqslant t_j\leqslant 1$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} t_j(1-t_j)$发散，特别，取$t_j=\frac{1}{j}$ 时，有

$$\|u_n^{j+1} - u_n^*\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{j+1}}\|u_n^1 - u_n^*\|,$$

这里 u_n^1 为初值，u_n^* 为投影方程的真解。

如果算子 A: $H\to H$ 只满足具有常数为 α 的强单调性条件，又假设 A 为有界算子，此时可采用下述迭代格式而获得$Au=$

0 的近似投影解

$$u_n^{j+1} = u_n^j - \alpha_j P_n A(u_n^j), \tag{3.234}$$

其中 $\alpha_j = \alpha'_j / a_j$, $\{\alpha'_j\}$ 为正数列, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha'_j$ 发散，但 $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha'^2_j$ 收敛，而 a_j 满足关系

$$\|\beta^{(j)}\| + \delta \geqslant a_j \geqslant \|\beta^{(j)}\| + \gamma,$$

其中，$\delta \geqslant \gamma > 0$ 为任意常数，$\|\beta^{(j)}\|$ 为 $(P_n A u_n^j - P_n f)$ 在 H_n 空间中坐标向量的欧氏范数，即若 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 为 H_n 的基时

$$(P_n A u_n^j - P_n f) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(j)} \phi_k,$$

$$\|\beta^{(j)}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k^{(j)})^2.$$

与前面情况类似，(3.234)式也可以写为内积的形式。

例3.17 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = \dfrac{1}{2}\cos u - \dfrac{1}{2}\cos[x(x-1)] + x(x-1) - 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

本例已在例 3.1 讨论过，它的变分方程可以转化为压缩算子方程。采用(3.230)提供的迭代格式以求投影解的近似，即

$$a(u_n^{(j+1)}, v) = b(u_n^{(j)}, v), \ \forall v \in H_n;$$

其中 $a(u, v)$, $b(u, v)$ 分别如式(3.17)、(3.18)所示，而 H_n 为以分片线性山形函数为基的 n 维子空间。取 $n = 17$，经过五次迭代算得 $x_i = (i-1)/16$ $(i = 2, 3, \cdots, 16)$处的值如下表。

表5

$i=$	数值迭代解	真解 $u=x(x-1)$	最大绝对误差
2	−0.05862908	−0.05859375	
3	−0.10944071	−0.10937500	
4	−0.15243500	−0.15234375	
5	−0.18761204	−0.18750000	
6	−0.21497190	−0.21484375	
7	−0.23451461	−0.23437500	
8	−0.24624023	−0.24609375	0.00014877
9	−0.25014877	−0.25000000	
10	−0.24624023	−0.24609375	
11	−0.23451461	−0.23437500	
12	−0.21497190	−0.21484375	
13	−0.18791206	−0.18750000	
14	−0.15243503	−0.15234375	
15	−0.10944074	−0.10937500	
16	−0.05862910	−0.05859375	

例8.18 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{a(p)}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{a(p)}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=f(x,y),\ x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

其中 $f(x,y)=\left(1+\dfrac{1}{100\pi}\operatorname{arctg} p\right)(2-x^2-y^2)$

$$-\frac{1}{100\pi(1+p^2)}[2x^2(y^2-1)^3$$

$$+8x^2y^2(x^2-1)(y^2-1)+2y^2(x^2-1)^3],$$

$\Omega=[-1,1;\ -1,1]$ 为正方形，

$$p=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\qquad a(p)=\frac{100\pi}{100\pi+\operatorname{arctg} p}.$$

上述问题的变分方程是

$$a(u,v)=f(v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

其中 $a(u,v)=\int_\Omega \frac{1}{a(p)}\ \frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}dxdy,$

$$f(v)=\int_\Omega f(x,y)v(x,y)dxdy.$$

与上述变分方程等价的算子方程是 $Au=f$,

其中 $(Au,v)=a(u,v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$,

$(f,v)=f(v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$.

由于 $\frac{1}{a(p)}$ 是 p 的非减函数，$1\leqslant\frac{1}{a(p)}\leqslant\frac{201}{200}$ 并且 $p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{a(p)}\right)\leqslant\frac{1}{200\pi}$，从而本例可以化为 A 满足以 1 为常数的强单调算子，同时满足以1.01313098为常数的 Lipschitz 条件的算子方程求解问题. 今用如下页的图三角剖分 Ω.

取分片线性函数为 H_n 的基函数 ($n=41$)，采用 (3.232) 所示迭代格式，即

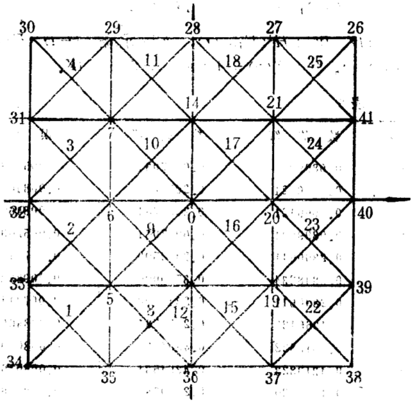
$$(u_n^{j+1},\varphi)=(u_n^j,\varphi)-l(A(u_n^j)-f,\varphi),\ \varphi\in H_n,$$

或等价地

$$(u_n^{j+1},\varphi_i)=(u_n^j,\varphi_i)-l(a(u_n^j,\varphi_i)-(f,\varphi_i)),$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

取初值 $u_n^0=c=1$（而边界点处取 0），$l=0.9$ 时经过 6 次迭代，其数值结果如表 6 .



本例题有精确解 $u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-1)(y^2-1)$。需要说明一点，如果问题的边界条件并非齐次的，例如：

$$u|_{\Gamma_D}=g,\quad \frac{du}{dn}=k(x),\ x\in\Gamma_N,$$

$$h\left(\frac{du}{dn}\right)=k-u,\ x\in\Gamma_P,$$

其中 $\partial\Omega=\Gamma_D+\Gamma_N+\Gamma_P$, mes $\Gamma_D\neq0$, $\frac{du}{dn}$ 为法线方向导数，这时除对二元泛函数 $a(u,v)$ 及 $f(v)$ 作相应的改变外，还需将第一边界条件齐次化，记

$$W = \{u: u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = g\},$$

$$H^1(\Gamma_D, \Omega) = \{u: u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

此时显然 $W = W_1 + H^1(\Gamma_D, \Omega)$，然后求解 $u^* \in H^1(\Gamma_D, \Omega)$ 使 $\bar{A}(u^*) = f$，其中 $\bar{A}(v) = A(v + w_1)$，而 $w_1 \in W$。

表 6

节点号	数 值 解	精 确 解	误 差
1	0.0899931	0.0957031	0.00570994
2	0.1966121	0.2050781	0.0084660
3	0.1966121	0.2050781	0.0084660
4	0.0899931	0.0957031	0.00570994
5	0.2890611	0.2812500	−0.0078111
6	0.3848234	0.3750000	−0.0098234
7	0.2890611	0.2812500	−0.0078111
8	0.1966120	0.2050781	0.0084660
9	0.4313822	0.4394531	0.0080708
10	0.4313823	0.4394531	0.0080707
11	0.1966120	0.2050781	0.0084661
12	0.3848232	0.3750000	−0.0098232
13	0.5126393	0.5000000	−0.0126394
14	0.3848229	0.3750000	−0.0098229
15	0.1966120	0.2050781	0.0084660
16	0.4313821	0.4394531	0.0080709
17	0.4313819	0.4394531	0.0080711
18	0.1966120	0.2050781	0.0084661
19	0.2890613	0.2812500	−0.0078113
20	0.3848229	0.3750000	−0.0098229
21	0.2890610	0.2812500	−0.0078110

例3.19 我们仍然讨论例3.18所给出的微分方程边值问题，

但是这时只利用它所对应的算子方程 $Au=f$ 中的算子 A 满足强单调条件来构造它的迭代解，其迭代格式由(3.234)给出，即

$$u_n^{(j+1)}=u_n^{(j)}-\alpha_j P_n A u_n^{(j)},$$

或等价地

$$(u_n^{(j+1)}, v_n)=(u_n^{(j)}, v_n)-\alpha_j(a(u_n^{(j)}, v_n)-(f, v_n)),$$

$$\forall v_n\in H_n.$$

这个格式与上例不同之处在于因子 α_j 此时随 j 不同而不同，取 $\alpha'_i=\frac{1}{i}(i=1, 2, \cdots, n)$，而 δ, γ 均取0.5，除边界点为 0 外，所有点取初值为 1，经过32次迭代算得结果如表 7 。

计算结果表明，它比上例中所提供的方法收敛显著减慢。很多实例的经验表明，在算子 A 既满足单调性条件，又满足 Lipschitz 条件的情况下，采用例3.18的方法为宜，但如果 A 只满足单调性条件时，也可采用本例所示的一种收敛的迭代格式。

投影方程的迭代解法通常要求满足较强条件才能保证收敛性。如何获得在较弱条件下投影法所导出的非线性方程组

$$P_n A u_n=0, \qquad u_n\in E_n \tag{3.235}$$

或

$$(Au_n, \varphi)=0, \quad \varphi\in H_n \tag{3.236}$$

的近似解，自然是人们关心的问题。**单纯形算法**（有时也称**不动点算法**）便是其中的一种方法。其基本思想是通过对 R^n 空间越来越细的单纯形剖分，运用既定的轮回规则寻找全标单纯形，这些全标单纯形的聚点就是(3.235)，(3.236)式的根。

我们将(3.235)，(3.236)式写成通常的形式

$$F(x)=0, \quad x\in R^n,$$

其中 $F(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^T$。假设 $F(x)$ 在 Ω 上连

表7

节点号	近 似 解	精 确 解	误 差
1	0.0901318789	0.0957031250	0.0055712461
2	0.1967324018	0.2050781250	0.0083457232
3	0.1967324018	0.2050781250	0.0083457232
4	0.0901318789	0.0957031250	0.0055712461
5	0.281669273	0.2812500000	−0.0079169273
6	0.3849138021	0.3750000000	−0.0099138021
7	0.281669869	0.2812500000	−0.0079169869
8	0.1967324018	0.2050781250	0.0083457232
9	0.4314656258	0.4394531250	0.0079874992
10	0.4314655662	0.4394531250	0.0079875588
11	0.1967324018	0.2050781250	0.0083457232
12	0.3849136829	0.3750000000	−0.0099136829
13	0.5127098560	0.5000000000	−0.0127098560
14	0.3840137425	0.3750000000	−0.0[illegible]137450
15	0.1967324018	0.2050781250	0.0083457232
16	0.4314654469	0.4394531250	0.0079876781
17	0.4314654469	0.4394531250	0.0079876781
18	0.1967324018	0.2050781250	0.0083457232
19	0.2891668677	0.2812500000	−0.0079168677
20	0.3849136233	0.3750000000	−0.0099136233
21	0.28916[illegible]	0.2812500000	−0.007[illegible]

续，这里 Ω 为 R^n 中的有界开集，此外又设

$$(Fx, x)>0, \quad x\in \partial\Omega,$$

于是用单纯形法求近似解的算法可概述如下[24].

首先用单纯形 J 剖分 $(0, 1)\times R^n$（例如说具有初始步长的 J_3 单纯剖分）并定义 Q: $(0, 1)\times R^n \to R^n$ 如下：

$$Q(t, x)=\begin{cases} x & , t=0, \\ F(x), & 0<t<1, \end{cases}$$

其中 $(t, x)\in(0,1]\times R^n$. 今采用公式

$$l(t, x)=\min[\{i:Q_i(t, x)<0\}\cup\{n+1\}]$$

来定义整数标号 $l:(0, 1]\times R^n\to\{1, 2, \cdots, n+1\}$。如果 n 维单纯形具有 $n+1$ 个不同的标号，则称该单纯形为**全标单纯形**。

可以按下述方式寻找全标单纯形序列：首先假定 $\sigma_1\in J$ 是使 $\tau_0=\sigma_1\cap\{1\}\times R^n$ 具有全标的唯一单纯形，然后按下述步骤给出其算法（详细参看[24]）。

步骤 0　用 x_0 表示 τ_0 的重心在 R^n 上的投影，记 y^+ 为 σ_1 的但又不是 τ_0 的顶点，置 $m=1$ 转向步骤 1。

步骤 1　令 y^- 为 τ_{m-1} 上使得满足 $l(y^-)=l(y^+)$ 的顶点，用 τ_m 表示由除 y^- 以外的所有 σ_m 的顶点所生成的单纯形，并记 x^m 为 τ_m 的重心于 R^n 上的投影，转向步骤 2。

步骤 2　通过单纯形剖分的轮回规则，寻找与 σ_m 有公共单纯形面 τ_m 的唯一单纯形 σ_{m+1}，记 y^+ 是 σ_{m+1} 的但不属于 σ_m 的顶点，置 $m=m+1$，转向步骤 1。

当初始步长充分小时，算法可以形成一个以 x^0 为初始点的序列 $\{x^m\}$，$\{x^m\}$ 收敛于 F 的一个零点，或至少以 F 的一个零点为聚点。同时单点集列 $\{\{x^m\}\}$ 在集合意义下收敛于 F 的零点集。

下述例子满足在例3.7中最后提到的那种类型方程的诸条件，因而解的存在性及近似解的收敛性已获解决。

例3.20　考虑

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{a(x,y,p)}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{a(x,y,p)}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\
=f(x,y,u), \quad (x,y)\in\Omega, \\
u|_{\partial\Omega}=0,
\end{cases}
$$

其中 $p=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $a(x,y,p)=\dfrac{2+p}{1+p}$,

$$
\begin{aligned}
f(x,y,u)=&[4x^3(2x+y-1)^2+xy^2(2x+y-1)(2x+2y-1)\\
&+3xy(2x+y-1)(x+2y-1)(2x+2y-1)\\
&+4x^3(x+2y-1)]\\
&\times[1+y^2(2x+y-1)^2+x^2(x+2y-1)^2]^{-2}\\
&-\frac{2(x+y)(2+y^2(2x+y-1)^2+x^2(x-2y-1)^2)}{1+y^2(2x+y-1)^2+x^2(x+2y-1)^2}\\
&+\frac{(2x+y-1)(2x+2y-1)u}{\left[1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2}.
\end{aligned}
$$

本例精确解为 $u=xy(x+y-1)$，区域 $\Omega=\{(x,y)\in R^2|x>0,y>0,x+y<1\}$. 今用三角形剖分 Ω，并采用分片线性插值逼近以构造投影算子，当取 $x^0=\left(-\frac{1}{7},-\frac{2}{7},\cdots,-\frac{6}{7}\right)^T$ 时，单纯形算法求得的解列表如下.

表 8

内部节点坐标	计算值	精确值	绝对误差
(0.2,0.6)	-0.02378	-0.024	0.00022
(0.2,0.4)	-0.03193	-0.032	0.00007
(0.4,0.4)	-0.03293	-0.032	0.00093
(0.2,0.2)	-0.02345	-0.024	0.00055
(0.4,0.2)	-0.03270	-0.032	0.00070
(0.6,0.2)	-0.02462	-0.024	0.00062

第 四 章

特征值与分歧问题的投影解法

在线性代数中，关于矩阵特征值与特征向量的概念是众所周知的，对于算子问题也可作类似的考虑。

设 E 为 Banach 空间，$T: E\to E$ 是线性算子，λ 为一数（实或复）。如果在 E 中有非零元 $x\in D(\mathrm{T})$ 使得

$$\mathrm{T}x=\lambda x, \tag{4.1}$$

则称 λ 是 T 的 **特征值**（或**固有值**），而 x 称为 T 的相应于 λ 的**特征向量**（或**固有元**）。

以下我们用 $X_{T,\lambda}$ 表示算子 T 的相应于特征值 λ 的**特征向量空间**，它由相应于 λ 的特征向量的全体添加零向量而成，即

$$X_{T,\lambda}=\{x\in E:\ (T-\lambda)x=0\}, \tag{4.2}$$

称 $X_{T,\lambda}$ 的维数（记作 $\dim X_{T,\lambda}$）为特征值 λ 的**几何重数**（或**重复度**）。称

$$X_{T,\lambda}^{(i(\lambda))}=\{x\in E:\ (\mathrm{T}-\lambda)^{i(\lambda)}x=0\} \tag{4.3}$$

为 λ 的**广义特征向量空间**，其中的 $x\neq0$ 称为**广义特征向量**。如果 $i(\lambda)$ 是使 $X_{T,\lambda}^{k+1}=X_{T,\lambda}^{k}$ 的最小整数 k，则称它为特征值 λ 的**秩**（或 **Riesz 指数**），这里

$$X_{T,\lambda}^{k}=\{x\in E:\ (T-\lambda)^{k}x=0\}.$$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_{T,\lambda}^{k}$ 的维数 l 称为 λ 的重数，$l=1$时的 λ 称为简单特征值。

容易看出，$X_{T,\lambda}$ 是 E 的线性子空间，而当算子 T 连续时，

$X_{T,\lambda}$ 还是 E 的闭子空间。如果 T 还是列紧的，则 $X_{T,\lambda}$ 是有限维的。此时，使 $X_{T,\lambda}^{k+1}=X_{T,\lambda}^{k}$ 的最小整数 k 必存在（见引理2.5或附录一定理 2 ）。

我们用 $\rho(T)$ 表示算子 T 的**预解集**，即

$$\rho(T)=\{\lambda: \exists (\lambda-T)^{-1}\in L(E)\}. \qquad (4.4)$$

$\rho(T)$ 的补集称为算子 T 的**谱**（记为 $\sigma(T)$）。T 的特征值的全体称为 T 的**点谱**，记为 $\sigma_p(T)$。显然知 $\sigma_p(T)\subset\sigma(T)$。不是特征值的谱点全体称为 T 的**连续谱**，记为 $\sigma_c(T)$。

对于非线性算子 F，仿线性算子的术语，也有类似的概念。即如果存在非零元 $x\in E$ 及数 $\lambda\neq 0$ 使

$$F(x)=\lambda x, \qquad (4.5)$$

则称 λ 为算子 F 的特征值，x 为 F 相应于特征值 λ 的特征向量。也称非线性算子 F 的特征值集合为 F 的谱，并记为 $\sigma(T)$。要注意的是，这个概念并不完全符合线性算子关于谱的定义，不过目前文献上已多采用这一术语。

求解(4.1)、(4.5)的 λ 与相应的非零向量 x 的问题称为算子 T（相应地 F）的特征值问题。

本章旨在对列紧线性算子的特征值问题和非线性算子的分歧问题的投影解法的某些内容作初步的介绍。

4.1 线性算子特征值问题的投影解法

本节着重讨论列紧线性算子的特征值的投影解法。先给出有关谱、特征值、特征向量近似理论的一般性结果。

我们仍设 E 为 Banach 空间，$T\in L(E)$。由定理2.2可得：若 $\lambda\in\rho(T)$，且 $|\mu-\lambda|<\dfrac{1}{\|(\lambda-T)^{-1}\|}$，则 $\mu\in\rho(T)$。也即预解

集 $\rho(T)$ 是开集，从而 $\sigma(T)$ 是闭集。又由定理2.1知，若 $|\lambda|>\|T\|$，则 $\lambda\in\rho(T)$ 且有

$$(\lambda-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k}{\lambda^{k+1}},\quad \|(\lambda-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{(|\lambda|-\|T\|)},$$

$$\|(\lambda-T)^{-1}\|\to 0,\quad 当|\lambda|\to\infty,$$

因此，$\lambda\in\sigma(T)$ 时，$|\lambda|\leqslant\|T\|$，即 $\sigma(T)$ 是有界的，从而 $\sigma(T)$ 是列紧集。

又由列紧算子的谱分析理论（见附录一），$\sigma(T)$ 或者为有限集，或者是以0为极限的可列无限集，当 E 为无穷维空间时，$0\in\sigma(T)$。又每一个非零的 $\lambda\in\sigma(T)$ 是 T 的特征值（由附录一定理4可知），且其对应的特征向量空间 $X_{T,\lambda}$ 是有限维的。

为方便起见，我们常把数域加以单点紧化，即当 E 为复空间时，将 $\lambda=\infty$（而当 E 为实空间时，将 $\lambda=\pm\infty$）作为数域的元添加到复数域(实数域)中。对于这样的 λ 与任意的 $T\in L(E)$，我们定义 $(\lambda-T)^{-1}=0$，这时扩充的预解集 $\widetilde{\rho}(T)$ 是由 $\rho(T)$ 与紧化的点组成，而扩充了的数域中的一个集是列紧的，当且仅当它是闭的。

$T\in L(E)$ 的预解式是函数 $\lambda\mapsto(\lambda-T)^{-1}$。它映 $\widetilde{\rho}(T)$ 到 $L(E)$，由定理2.2，它是一个连续函数，因此算子集合 $\{(\lambda-T)^{-1}:\lambda\in\Lambda\}$ 对每个闭集 $\Lambda\subset\widetilde{\rho}(T)$ 是列紧的。此外，预解式还满足下面等式

$$(\lambda-T)^{-1}-(\mu-T)^{-1}=(\mu-\lambda)(\lambda-T)^{-1}(\mu-T)^{-1},$$

$$\lambda,\ \mu\in\rho(T).\qquad (4.6)$$

定理4.1 设 T、$T_n\in L(E)$，$n\in N$，$T_n\xrightarrow{cc}T$，则对每个

闭集$\wedge \subset \widetilde{\rho}(T)$，存在 n_0 使得

(i) $\wedge \subset \widetilde{\rho}(T_n)$，$n \geqslant n_0$，

(ii) $\{\|(\lambda - T_n)^{-1}\|: \lambda \in \wedge, n \geqslant n_0\}$ 有界，

(iii) 对每个 $x \in E$，$(\lambda - T_n)^{-1}x \longrightarrow (\lambda - T)^{-1}x$，

$\forall \lambda \in \wedge$ 一致地成立。

证 因为 $\wedge$ 是列紧集，$\{\|(\lambda - T)^{-1}\|: \lambda \in \wedge\}$ 也是列紧的，并注意到当 $|\lambda|$ 充分大时，$\|(\lambda - T)^{-1}\|$ 充分小，从而 $\Delta_n = \|(\lambda - T)^{-1}(T_n - T)T_n\| \to 0$ 关于 $\lambda \in \wedge$ 一致成立。于是由定理 2.19 推得(i)和(iii)成立。

定理4.1告诉我们，若 $\wedge$ 属于算子 T 的预解集，则可推出它也属于近似算子 T_n 的预解集及其它有关属性。类似于定理2.20是定理2.19的逆命题一样，对 T 及 T_n 加上不多的条件，也有定理4.1的相反的命题，即由 $\wedge$ 属于 T_n 的预解集可以推出它也属于其极限算子 T 的预解集以及其它的有关属性，在此我们从略。

作为定理4.1的直接结果，有

推论 设 T、$T_n \in L(E)$，$n \in N$，$T_n \xrightarrow{cc} T$，则对每个开集 $\Omega \supset \sigma(T)$，当 n 充分大以后 $\Omega \supset \sigma(T_n)$。

上面的推论描述了当 n 充分大时，T 的谱集任何邻域包含其近似算子 T_n 的谱集，即 $\sigma(T_n) \to \sigma(T)$，下面的定理指出由 T_n 的谱的有关属性可推知 T 的谱的有关属性，并且指出其相应的特征向量的关系以及相应特征子空间维数的关系。

定理4.2 设 T、$T_n \in L(E)$，$n \in N$，$T_n \xrightarrow{cc} T$（或者设 $T_n \xrightarrow{ac} T$），若 $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ 且 $\lambda_n \to \lambda \neq 0$，则 $\lambda \in \sigma(T)$；若 $\{x_n\}$ 有界且 $x_n \in X_{T_n, \lambda_n}$，则存在 $\{T_{n_i}\}$，$\{x_{n_i}\}$ 与 $x \in E$，使得

$x_{n_i}\to x\in X_{T,\lambda}$. 而当 n 充分大以后

$$\dim X_{T_n,\lambda_n}\leqslant\dim X_{T,\lambda}.$$

证 $\lambda\in\sigma(T)$的结论是定理2.19的直接结果，因为我们总可以认为$\lambda_n\neq 0$，并置 $K=T/\lambda$, $K_n=T_n/\lambda_n$, 便有 $K_n\xrightarrow{ac}K$. 若假设 $\lambda\overline{\in}\sigma(T)$，从而 $\lambda\in\rho(T)$，应用定理2.19推得 n 充分大时 $\lambda_n\in\rho(T_n)$. 这与假设矛盾，所以 $\lambda\in\sigma(T)$.

假定$\{x_n\}$有界，$x_n\in X_{T_n,\lambda_n}$, $n\in N$. 因为 $T_n\xrightarrow{ac}T$, 故$\{T_n\}$渐近列紧，于是存在子列$\{x_n\}$, $n\in N'\subset N$ 与 $y\in E$，使得 $T_nx_n\to y$. 又因为 $\lambda_n\to\lambda$ 且$\lambda_nx_n=T_nx_n$, $n\in N'\subset N$，于是

$$x_n=T_nx_n/\lambda_n\to x=y/\lambda.$$

由 $T_n\xrightarrow{ac}T$ 知 $T_n\xrightarrow{c}T$，故

$$T_nx_n\to Tx,\ \text{当}n\in N',\ n\to\infty,$$

从而由极限唯一性知$(\lambda-T)x=0$，即 $x\in X_{T,\lambda}$.

最后证明不等式 $\dim X_{T_n,\lambda_n}\leqslant\dim X_{T,\lambda}$. 因为 $T_n\xrightarrow{ac}T$，所以$\lambda_n-T_n\xrightarrow{r}\lambda-T$（离散地），从而根据 $\lambda_n-T_n\xrightarrow{c}\lambda-T$ 推得$\{N(\lambda_n-T_n)\}^*\subset N(\lambda-T)$。现在记$U=\{x;\ \|x\|=r\}$（$r$ 为任意正数），$B_n=N(\lambda_n-T_n)\cap U$，则$(\lambda_n-T_n)B_n=\{0\}$. 由于$\{\lambda_n-T_n\}$是渐近正规的，因此$\{N(\lambda_n-T_n)\cap U\}$是 d-列紧的. 另一方面，由于 $\dim N(\lambda-T)<+\infty$，因而存在闭集 F 使 $E=N(\lambda-T)\oplus F$. 显然 $N(\lambda-T)\cap F=\{0\}$，从而当 n 充分大时有 $N(\lambda_n-T_n)\cap F=\{0\}$. 从$\{B_n\}$的 d-列紧性推得$\{N(\lambda_n-T_n)\cap F\cap U\}$也是 d 列紧的，这样便有

$$\{N(\lambda_n - T_n) \cap F \cap U\}^* \subset N(\lambda - T) \cap F \cap U = \varnothing.$$

从而当 n 充分大时，$N(\lambda_n - T_n) \cap F \cap U = \varnothing$. 因此得知 $N(\lambda_n - T_n) \cap F = \{0\}$. 进一步推出

$$\dim N(\lambda_n - T_n) \leqslant \operatorname{Codim} F = \dim N(\lambda - T),$$

定理证完。

有了前面的一般性结果后，我们现在回到方程(4.1)

$$\lambda x = Tx, \quad x \in E.$$

它所对应的投影方程为

$$\lambda x_n = P_n T x_n, \quad x_n \in E_n. \tag{4.7}$$

这里 $E_n \subset E$ 是有限维子空间，$P_n: E \to E_n$ 是投影算子. 若 $T \in L(E)$ 列紧，且投影算子 P_n 满足 $P_n \xrightarrow{p} I$，则由(2.159)式知 $\{P_n T\}$ 族列紧. 又由§1.5知 $P_n T \xrightarrow{cc} T$. 取 $T_n = P_n T$，于是由定理4.1的推论与定理4.2，我们可以得到方程(4.1)与其投影方程(4.7)的特征值与特征向量的关系如下：

定理4.3 设 $T \in L(E)$ 列紧，投影算子 P_n 满足 $P_n \xrightarrow{p} I$，则

(i) 对每个开集 $\Omega \supset \sigma(T)$，当 n 充分大以后，有

$$\Omega \supset \sigma(P_n T).$$

(ii) 方程(4.7)的任何特征值序列 $\{\lambda_n\}$ 的每一个非零极限点 λ 都是方程(4.1)的一个特征值.

(iii) 相应于方程(4.7)的特征值 λ_n 所对应的特征向量 x_n 所组成的有界向量序列 $\{x_n\}$（不失一般性，可假定 $\|x_n\| = 1$），当 $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ 时必含有一个收敛的子列 $\{x_n\}$，$n \in N' \subset N$. 其极限是原方程(4.1)的相应于特征值 λ 的一个特征向量.

与第二章关于列紧线性算子方程的解法相类似，在实际计算

特征值问题中，由于数值扰动或者近似方式不同，得到的方程并不是真正的投影方程(4.7)，而是扰动了的投影方程

$$\lambda x_n = P_n T x_n + S_n x_n, \tag{4.8}$$

其中 $S_n \in L(E)$。

若令 $T_n x_n = P_n T x_n + S_n x_n = (P_n T + S_n) x_n$，则(4.8)可以写为

$$\lambda x_n = T_n x_n. \tag{4.9}$$

又若设 T: $E \to E$ 线性列紧，$P_n \xrightarrow{p} I$，$S_n \xrightarrow{ac} 0$，则$P_n T \xrightarrow{cc} T$ 且由(2.161)有 $T_n \xrightarrow{ac} T$。因此有

定理4.4 设 $T \in L(E)$ 列紧，$P_n \xrightarrow{p} I$，$S_n \xrightarrow{ac} 0$，则对方程(4.1)的每个特征值 $\lambda_0 \neq 0$，存在方程(4.9)的特征值序列$\{\lambda_n\}$使 $\lambda_n \to \lambda_0$ $(n \to \infty)$。

反之，方程(4.9)的任何特征值序列$\{\lambda_n\}$的每一个非零极限点，都是方程(4.1)的一个特征值。

证 设 λ_0 是(4.1)的一个特征值，且 $\delta > 0$ 是使圆盘 $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$ 不含有(4.1)的异于 λ_0 的特征值的一个数，任取 $\varepsilon \in (0, \delta]$，范数$\|(\lambda - T)^{-1}\|$在圆$|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ 上有界（不依赖于 λ，由定理4.1取 $T_n = T$ 可看出），即

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leqslant k \quad (k \text{ 为常数}, \ |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon).$$

因$T_n \xrightarrow{ac} T$，由定理2.19当 n 充分大以后，算子 $\lambda - T_n$ 有连续的逆算子，并且逆的范数关于 λ 与 n 是一致有界的，即当$|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ 时且 n 充分大以后有

$$\|(\lambda - T_n)^{-1}\| \leqslant k' \ (k' \text{ 为常数}). \tag{4.10}$$

若有子列 N'，$\forall n\in N'$，方程(4.9)在圆盘$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$ 中没有特征值，对这些 n 值，应用定理2.2及不等式(4.10)，当 ε 足够小时，(λ_0-T_n)可逆而且

$$\|(\lambda_0-T_n)^{-1}\|\leqslant k_\varepsilon'',\ n\in N'\ (\ k_\varepsilon''\ 为常数\ ).$$

如果 $n\in N'$ 充分大，则由定理2.20推知，算子 λ_0-T 在 E 中可逆，即 λ_0 不是方程(4.1)的特征值，这与假设矛盾，于是当 n 充分大以后，当 ε 取得足够小时，方程(4.9)在圆盘$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$ 中至少有一个特征值 λ_n，又由 ε 的任意性，定理的前一个结论获证。

现在设 λ_n 为(4.9)的特征值，$n\in N$，$\lambda_n\to\lambda_0\neq0$，因此可以认为 $\lambda_n\neq0$ 且 $\lambda_n\in\sigma(T_n)$，$T_n=P_nT+S_n$。记 $K_n=T_n/\lambda_n$，$K=T/\lambda_0$，因为 $T_n\xrightarrow{ac}T\Longrightarrow T_n/\lambda_n\xrightarrow{ac}T/\lambda_0$，与定理4.2中证明方法一样，如果 $\lambda_0\overline{\in}\sigma(T)$ 则引出矛盾。又因 $\lambda_0\neq0$，故 λ_0 为 T 的特征值。

定理4.5 在定理4.4的假设下，相应于方程(4.9)的特征值 λ_n 的每个规范化(即范数$\|x_n\|=1$)的特征向量序列$\{x_n\}$,当$\lambda_n\to\lambda_0\neq0$时必含有一个收敛的子序列，其极限是方程(4.1)的相应于特征值 λ_0 的一个特征向量。

证 重复定理4.2的证明得知本定理成立。

现在我们转向特征值的误差估计。

设 λ_0 与 λ_n 分别为(4.1)与(4.9)的特征值，引入记号

$$P^{(n)}=I-P_n,$$

$$F_0=\{f_0\in E^*:\ (\lambda_0-T)^*f_0=0\},$$

$$\rho(x_0,X)=\inf_{x\in X}\|x-x_0\|,\ 其中\ X\ 为\ E\ 的子空间.$$

当 T 是列紧线性算子时，T^* 也是列紧的，F_0 是对偶方程

$\lambda f = T^* f$ 的特征向量空间，注意到附录一中定理 4 的(ii)得知当 T 为列紧线性算子时，

$$\dim N(I-T) = \operatorname{codim} R(I-T) = \dim N((I-T)^*),$$

从而
$$\dim X_{T,\lambda_0} = \dim F_0.$$

定理4.6 设定理4.4的条件成立，并设 $\lambda_n \to \lambda_0 \neq 0$，$\lambda_0$ 的秩为1，则

$$|1/\lambda_n - 1/\lambda_0| \leqslant c(\|S_n\| + \varepsilon_n \varepsilon_n^*), \tag{4.11}$$

其中
$$\varepsilon_n = \sup_{\substack{x_0 \in X_{T,\lambda_0} \\ \|x_0\|=1}} \|P^{(n)} x_0\|, \tag{4.12}$$

$$\varepsilon_n^* = \sup_{\substack{f_0 \in F_0 \\ \|f_0\|=1}} \|(P^{(n)})^* f_0\|, \tag{4.13}$$

而且对每个 $x_n \in X_{T_n,\lambda_n}$ ($\|x_n\|=1$)，

$$\rho(x_n, X_{T,\lambda_0}) \leqslant c(\|S_n\| + \varepsilon_n). \tag{4.14}$$

证 对 $\widetilde{x}_n \in E_n$，

$$\left(1 - \frac{T}{\lambda_0}\right)\widetilde{x}_n = \left(1 - \frac{T_n}{\lambda_n}\right)\widetilde{x}_n + \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0}\right) T_n \widetilde{x}_n - \frac{1}{\lambda_0}(T - T_n)\widetilde{x}_n,$$

取 $\widetilde{x}_n = x_n \in X_{T_n,\lambda_n}$ ($\|x_n\|=1$)，有

$$\left(1 - \frac{T}{\lambda_0}\right) x_n = \frac{\dfrac{1}{\lambda_n} - \dfrac{1}{\lambda_0}}{\dfrac{1}{\lambda_n}} x_n - \frac{1}{\lambda_0}(T - T_n) x_n. \tag{4.15}$$

设泛函 $f_0 \in F_0$ ($\|f_0\|=1$)，由共轭算子的定义有

$$f_o\left(1-\frac{T}{\lambda_o}\right)=\left(1-\frac{T}{\lambda_o}\right)^* f_o=0.$$

将 $f_o\in F_o$ 作用于(4.15) 两边得

$$\frac{\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_o}}{\frac{1}{\lambda_n}} f_o(x_n)=\frac{1}{\lambda_o} f_o(T-T_n)x_n,$$

从而

$$|f_o(x_n)|\left|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_o}\right|=\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|\left|\frac{1}{\lambda_o}\right||f_o(T-T_n)x_n|, \tag{4.16}$$

而且这样的 f_o 可使得当 $n\geqslant n_o$ 时

$$|f_o(x_n)|\geqslant c_o>0 \quad (c_o \text{ 为常数}), \tag{4.17}$$

若不然，必存在子列$\{x_n\}$，$n\in N'\subset N$，使

$$\sup_{\substack{f_o\in F_o\\ \|f_o\|=1}} |f_o(x_n)|\longrightarrow 0,\ n\in N'\subset N,\ n\to\infty.$$

根据定理4.5，我们又可以假定这个子列满足下述关系：

$$x_n\longrightarrow x_o\in X_{T,\lambda_0},\ n\in N'\subset N,\ n\to\infty,$$

因而在极限点 x_o 又有

$$f_o(x_o)=0,\ \forall f_o\in F_o.$$

这表明方程 $x=\frac{1}{\lambda_o}Tx+x_o$ 的自由项 x_o 正交于齐次共轭方程的特征子空间 F_o，因而由 Fredholm 定理，这一方程有解 x'，即

$$\left(1-\frac{T}{\lambda_o}\right)x'=x_o\neq 0.$$

由于 $x_o\in X_{T,\lambda_0}$，又有

$$\left(1-\frac{T}{\lambda_o}\right)^2 x' = \left(1-\frac{T}{\lambda_o}\right)x_o = 0,$$

这意味着特征值 λ_o 的秩大于1，此与假设矛盾，从而由(4.16)、(4.17)得出

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_o}\right| \leqslant c_1 \sup_{\substack{f_o\in F_o\\ \|f_o\|=1}} |f_o(T-T_n)x_n|, \quad c_1 \text{ 为常数.} \tag{4.18}$$

为了得到估计式(4.11)以及对 $\rho(x_n, X_{T,\lambda_0})$ 作出估计，都需要估计 $\|(T-T_n)x_n\|$. 由于 T 是列紧的，X_{T,λ_0} 有限维，故存在投影算子 Q_o，使得 Q_o 与 $Q^{(0)}=I-Q_o$ 分别将空间 E 投影到其子空间 X_{T,λ_0} 与 $\widetilde{X}_{T,\lambda_0}=(\lambda_o-T)E$ 上，即 $E=X_{T,\lambda_0}\oplus\widetilde{X}_{T,\lambda_0}$，此处又有 $TX_{T,\lambda_0}\subset X_{T,\lambda_0}$，$T\widetilde{X}_{T,\lambda_0}\subset\widetilde{X}_{T,\lambda_0}$，而且 T 与 Q_o 以及 T 与 $Q^{(0)}$ 可交换. 用 $Q^{(0)}$ 作用到(4.15)式两边得

$$1-\left(\frac{T}{\lambda_o}\right)Q^{(0)}x_n = \frac{\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_o}}{\frac{1}{\lambda_n}} Q^{(0)}x_n$$

$$-\frac{1}{\lambda_o} Q^{(0)}(T-T_n)x_n.$$

因为算子 λ_o-T 在 $\widetilde{X}_{T,\lambda_0}$ 上连续可逆且 $\lambda_n\to\lambda_o$，于是我们得到估计

$$\|Q^{(0)}x_n\| \leqslant c_2\left[\left|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_o}\right| + \|(T-T_n)x_n\|\right]$$

(c_2 为常数).

联系(4.18)得

$$\|Q^{(0)}x_n\|\leqslant c_3\|(T-T_n)x_n\| \quad (c_3\text{ 为常数}). \tag{4.19}$$

显然
$$\rho(x_n,\ X_{T,\lambda_0})\leqslant\|Q^{(0)}x_n\|, \tag{4.20}$$

$$(T-T_n)x_n=U_nx_n-S_nx_n$$
$$=U_nQ_0x_n+U_nQ^{(0)}x_n-S_nx_n,$$

这里 $U_n=T-P_nT$.

又因
$$Q_0x_n\in X_{T,\lambda_0},$$
$$U_nQ_0x_n=P^{(n)}T(Q_0x_n)=\lambda_0P^{(n)}(Q_0x_n),$$

所以
$$(T-T_n)x_n=\lambda_0P^{(n)}(Q_0x_n)+U_n(Q^{(0)}x_n)-S_nx_n, \tag{4.21}$$

$$\|(T-T_n)x_n\|\leqslant|\lambda_0|\|Q_0\|\varepsilon_n+\|U_n\|\|Q^{(0)}x_n\|+\|S^n\|,$$

其中 ε_n 如(4.12)定义。

注意到 $n\to\infty$ 时 $\|U_n\|\to 0$，从而利用 (4.19)以及 Q_0 的有界性，推得当 n 充分大以后

$$\|(T-T_n)x_n\|\leqslant c_4(\varepsilon_n+\|S_n\|) \quad (c_4\text{ 为常数}). \tag{4.22}$$

估计式(4.14)这时可由(4.20)、(4.19)、(4.22)得出，并且由(4.18)得

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_0}\right|\leqslant c(\|S_n\|+\varepsilon_n). \tag{4.23}$$

公式(4.23)已经可以作为近似特征值的一个估计，但如果用到 P_n 以及 P_n^* 的一致有界性（因 $P_n\xrightarrow{p}I$），还可得到更好的估计式(4.11)。事实上，由(4.21)并注意 $P^{(n)}=(P^{(n)})^2$, $U_n=P^{(n)}U_n$ 可得

$$f_o(T-T_n)x_n=\lambda_o f_o P^{*}[P^{(n)}(Q_0x_o)+U_n(Q^{(0)}x_n)]$$
$$-f_oS_nx_n,$$

因为
$$\|f_oP^{(n)}\|=\|(P^{(n)})^*f_o\|\leqslant\varepsilon_n^*,$$

其中 ε_n^* 由(4.13)定义. 仿估计(4.21)右端已用过的技术得

$$\sup_{\substack{f_0\in F_0\\ \|f_0\|=1}}|f_o(T-T_n)x_n|\leqslant\varepsilon_n^*(|\lambda_o|\|Q_0\|\varepsilon_n$$
$$+\|U_n\|\cdot\|Q^{(0)}x_n\|)+\|S_n\|.$$

由(4.19), (4.23)估计出$\|Q^{(0)}x_n\|$后, 得

$$\sup_{\substack{f_0\in F_0\\ \|f_0\|=1}}|f_o(T-T_n)x_n|\leqslant c_5(\varepsilon_n\varepsilon_n^*+\varepsilon_n^*\|U_n\|\|S_n\|+\|S_n\|),\tag{4.24}$$

于是估计式(4.11)由(4.18), (4.24)与$\|U_n\|\to0$得出.

最后我们指出, 当 $S_n=0$ 时, (4.11)、(4.14)即为通常投影方法的近似特征值及特征元的误差估计.

例4.1 线性积分算子特征值的配置法.

设方程(4.1)中的算子 $T=K$ 是积分算子:

$$Kx=\int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

其中 $k(t,s)$在$[a,b]\times[a,b]$中连续. 这时 $K:C[a,b]\to C[a,b]$ 全连续. 又设$\{\varphi_i\}$, $i\in N$ 为 $C[a,b]$中的完备系, 那末线性无关函数组 $\varphi_1(t)$, …, $\varphi_n(t)$构成子空间 E_n 的一组基. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(t)$ 是特征函数 $x(t)$ 的近似, 用 $\tilde{\lambda}$ 作为相应的特征值的近似, 于是得到近似方程为

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_a^b k(t,s)\varphi_j(s)ds = \widetilde{\lambda} \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(t).$$

象第二章所述的那样，选择 n 个配置点 $t_1, \cdots, t_n$ 并要求上述方程当 $t=t_i$, $a\leqslant t_i\leqslant b(i=1, 2, \cdots, n)$ 时相等，即要求

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_i)a_j = \widetilde{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_i)a_j, \tag{4.25}$$

其中
$$\psi_j(t) = \int_a^b k(t, s)\varphi_j(s)ds. \tag{4.26}$$

这时，得到形如

$$Aa = \widetilde{\lambda} Ba \tag{4.27}$$

的广义矩阵特征值问题，其中 $A_{ij}=\psi_j(t_i)$, $B_{ij}=\varphi_j(t_i)$. 投影算子 P_n 如第二章所述定义为

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\varphi_i(t),$$

它是插值投影、$\varphi_i(t)$ 可称为（广义）插值基本多项式.

问题(4.27)可用 QZ 方法求解，它是 QR 算法的推广.

当函数组$\{\varphi_i(t)\}$构成 Haar 系统时（即 $\varphi_i(t)$ 连续并且只要 $t_1, \cdots, t_n$ 相异，则向量组$[\varphi_i(t_1), \cdots, \varphi_i(t_n)]i=1, 2, \cdots, n$ 线性无关），矩阵 B 对 $t_1, \cdots, t_n$ 的一切选择都是非奇异的，这时(4.27)可化为一般的代数特征值问题

$$(B^{-1}A)a = \widetilde{\lambda} a. \tag{4.28}$$

如果$\{\varphi_i(t)\}$不构成 Haar 系统，则有必要适当选择 t_i.

另一方面，也可以考虑问题 $x=\mu Kx$. 它与问题(4.1)等价$\left(\text{只要令 } \mu=\frac{1}{\lambda}\right)$，这时它化为

$$\widetilde{\mu}\alpha=(A^{-1}B)\alpha\ \left(\widetilde{\mu}=\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.29}$$

当然，即使 A^{-1}、B^{-1} 存在，(4.28)、(4.29)的问题也可能是病态的，因此直接求解(4.27)一般还好些。值得注意的是，即使核 $k(t, s)$是对称的，(4.27)中的 A 也不一定对称，且 B 一般是非对称的。

例4.2 考虑 Laplace 算子的特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\mu u,\ x\in\Omega, \\ u(x)=0\ ,\ x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{4.30}$$

其中 Ω 是 R^n 中的有界区域。

若存在 $u\in H_0^1(\Omega)$ 及 μ，使

$$(\Delta u, \Delta v)_o=\mu(u, v)_o,\ \forall v\in H_0^1, \tag{4.31}$$

则函数 $u(x)$ 称为对于 μ 的广义特征函数。这里

$$(u,\ v)_o\equiv\int_\Omega u(x)\cdot v(x)dx,$$

故 $\|u\|_o$ 即为 $\|u\|_{L^2}$。

我们引入一个新内积

$$(u,\ v)_*\equiv(\nabla u, \nabla v)_o,\ u, v\in H_0^1, \tag{4.32}$$

相应的范数为

$$\|u\|_*\equiv\|\nabla u\|_o,\ u\in H_0^1,$$

并记赋有这样范数的 H_0^1 空间为 H_*^1。由 Friedrichs 不等式

$$\|u\|_o\leqslant c\|\nabla u\|_o,\ \ \forall u\in H_0^1 \tag{4.33}$$

得知 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_*$ 在 H_0^1 上是等价范数(这里 $\|\cdot\|_1$ 是由内积

$(u, v)_1 = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))dx$ 导出的范数），由此得出 Hilbert 空间 $\overset{\circ}{H}{}^1$ 与 $\overset{\circ}{H}{}^1$ 等价。

现在(4.31)左边可写成(4.32)，右边借助(4.33)易知是 $v\in \overset{\circ}{H}{}^1$ 的有界线性泛函，即

$$|(u, v)_o| \leqslant \|u\|_o \cdot \|v\|_o \leqslant c\|u\|_o \cdot \|v\|_*.$$

由 Riesz 表现定理，可写为

$$(u, v)_o = (Lu, v)_*, \quad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1. \tag{4.34}$$

容易看出，$L: \overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ 是线性自共轭算子，事实上

$$(Lu, v)_* = (u, v)_o = (v, u)_o = (Lv, u)_* = (u, Lv)_*.$$

类似于第一章例1.3 的方法，可进一步证明 L 是列紧算子，事实上，

$$|(Lu, v)_*| = |(u, v)_o| \leqslant \|u\|_o \cdot \|v\|_o$$

$$\leqslant c\|u\|_o \cdot \|v\|_*,$$

取 $v = Lu$，得

$$\|Lu\|_* \leqslant c\|u\|_o \leqslant c_1\|u\|_*, \tag{4.35}$$

从而知 $L: \overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ 为连续算子。若设 $\{u_n\}$ 为 $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ 中的有界集，则由嵌入定理，它在 $L_2(\Omega)$ 中为相对紧，不妨就取为 $\{u_n\}$ 是 $L_2(\Omega)$ 中的 Cauchy 列，于是由(4.35)

$$\|Lu_m - Lu_n\|_* = \|L(u_m - u_n)\|_* \leqslant c\|u_m - u_n\|_o,$$

即 $\{Lu_n\}$ 也是 $\overset{\circ}{H}{}^1$ 中的 Cauchy 列，故 $L: \overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ 是列紧的。

联系(4.31)、(4.32)、(4.34)式，方程(4.31)可以写成

$$(u, v)_* = \mu(Lu, v)_*, \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1,$$

它给出自共轭列紧线性算子方程 $u=\mu Lu$ 或等价地

$$\lambda u = Lu \quad \left(令\lambda=\frac{1}{\mu},\ \mu\neq 0\right) \tag{4.36}$$

的特征值问题。

一般，如果H是 Hilbert 空间，$T: H\to H$ 是自共轭紧线性算子，则方程(4.1)的特征值问题可用 Галеркин 法求解。如所周知，这时T的特征值为实数，对应于不同的特征值的特征向量互为正交，并可将特征值（包括 0 特征值在内）排成序列

$$\cdots\leqslant\lambda_{-3}\leqslant\lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}<0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\cdots$$

用 Галеркин 法求特征值的具体过程如下：

设$\{H_n\}$是于H终归稠密的有限维闭子空间列，$P_n: H\to H_n$是正交投影，$\{\varphi_j\}$是H_n的一组基，即$H_n=[\varphi_1, \cdots, \varphi_n]$。于是问题可阐述为

求$\lambda_{k,n}$与非零向量$x_{k,n}\in H_n$，使之满足方程

$$P_n(\lambda_{k,n}x - Tx)=0,$$

或
$$\lambda_{k,n}x_{k,n}-P_nTP_nx_{k,n}=0,\ x_{k,n}\in H_n, \tag{4.37}$$

这相当于在子空间H_n上求解算子P_nTP_n的特征值与特征向量。因为$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$是$H_n$的基，所以$x_{k,n}$可表示为

$$x_{k,n}=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j, \tag{4.38}$$

这时(4.37)等价于$\left(由\ P_nx=\sum_{j=1}^{n}(x, \varphi_j)\varphi_j\right)$

$$\sum_{i=1}^{n}[\lambda_{k,n}(\varphi_i, \varphi_j)-(T\varphi_i, \varphi_j)]c_i=0,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{4.39}$$

(4.39)有非零解的充要条件是系数行列式等于 0，即

$$\begin{vmatrix} \lambda_{k,n}(\varphi_1, \varphi_1)-(T\varphi_1, \varphi_1) & \cdots\cdots & \lambda_{k,n}(\varphi_n, \varphi_1)-(T\varphi_n, \varphi_1) \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \lambda_{k,n}(\varphi_1, \varphi_n)-(T\varphi_1, \varphi_n) & \cdots\cdots & \lambda_{k,n}(\varphi_n, \varphi_n)-(T\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}=0.$$

由此求出 n 个特征值代入(4.39)求出系数 $c_1, \cdots, c_n$，最后得特征向量 $x_{k,n}$。

由于 T 是自共轭的，故(4.39)实际上是实对称矩阵的特征问题，这在数值代数中有很多有效的办法。

4.2 歧点问题的投影解法

下面我们考虑映某个实 Banach 空间 E 到它自己的非线性算子 $K: E\to E$ 的特征值问题，但是在这里不打算讨论它的一般情形，我们只简介一点关于非线性算子具有范数可以任意小的特征向量的条件，即一类在实际问题中常常可碰到的所谓歧点问题。

一个实数 μ 称为算子 K 的**歧点**，如果 $K0=0$ 且对任意 ε, $\delta>0$，存在 λ 和 x 使得

$$Kx=\lambda x,\ |\lambda-\mu|\leqslant\varepsilon,\ 0<\|x\|<\delta. \tag{4.40}$$

与线性情况一样，这里 λ, x 分别为K的特征值和特征向量。但是，歧点 μ 也可能不是K的特征值，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，式(4.40)中的特征向量的范数$\|x\|$充满区间$(0, \delta)$，则称对应于K的歧点 μ 的特征向量形成**连续分支**。

假定$K: E\to E$ 是列紧的，D-半连续，$K0=0$，而且 K 在 0 点有 Fréchet 导数 L，于是

$$K=L+T; \tag{4.41}$$

$$L\in L(E) \text{且} L \text{是列紧的}; \tag{4.42}$$

$$T \text{是列紧的且} D\text{-半连续}; \tag{4.43}$$

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\longrightarrow 0, \text{当} \|x\|\longrightarrow 0. \tag{4.44}$$

首先，我们给出一个非常有用的基本定理及其引理。

引理4.1 假定 K: $E\to E$ 是列紧的，D-半连续，$K0=0$，并在 0 点有 Fréchet 导数 L，又设 $\gamma\in\rho(L)$，则存在 $\varepsilon,\delta>0$，使得

$$Kx\neq\lambda x, \ |\lambda-\gamma|\leqslant\varepsilon, \ 0<\|x\|\leqslant\delta.$$

证 因为预解集 $\rho(L)$ 是开集，因此当 $\gamma\in\rho(L)$ 时，$(\gamma-L)^{-1}$ 存在且有界，由定理2.2，存在 $\varepsilon>0$ 以及正数 c 使得

$$\lambda\in\rho(L), \ \|(\lambda-L)^{-1}\|\leqslant c, \ |\lambda-\gamma|\leqslant\varepsilon. \tag{4.45}$$

假定有 λ 和 x 使

$$Kx=\lambda x, \ |\lambda-\gamma|\leqslant\varepsilon, \ x\neq 0,$$

于是有

$$Lx+Tx=\lambda x,$$

$$x=(\lambda-L)^{-1}(\lambda-L)x=(\lambda-L)^{-1}Tx,$$

$$\|x\|\leqslant c\|Tx\|,$$

根据(4.44)式，存在 $\delta>0$ 使 $\|x\|\geqslant\delta$，从而引理得证。

引理4.1启示我们，如果 γ 不是 L 的特征值，那末它也不是算子 K 的歧点。换言之，算子 K 具有很小范数的特征向量，只在其相应的特征值与 L 的特征值很接近才有可能。

在§3.2中，我们已经接触过全连续算子的旋转量及不动点指数的概念，假定 $x=0$ 是全连续向量场

$$\phi(t,x)=x-tKx \tag{4.46}$$

的孤立零点，t 是一个固定的参数，这时我们记 $\gamma(t,0)$ 为算子 tK 在 $x=0$ 的不动点指数。

定理4.7 假设 K: $E\to E$ 是列紧的连续算子，$K0=0$ 并且

满足（4.41）～（4.44），$\mu_0 \neq 0$ 是 L 的奇重特征值，则 μ_0 是 K 的歧点，而且存在着对应于 μ_0 的特征向量的连续分支。

证 设 μ_0 是 L 的奇重特征值，因 L 是有界线性列紧算子，从而在 μ_0 的某邻域不再有其他的特征值。今取 $\varepsilon > 0$ 足够小，使 $\mu_0 - \varepsilon \in \rho(L)$，$\mu_0 + \varepsilon \in \rho(L)$，利用引理4.1得知当 $\mu = \mu_0 - \varepsilon$，$\mu = \mu_0 + \varepsilon$ 时，方程 $\mu x = Kx$ 在包含 $x = 0$ 为其中心的某个球 B 中只有 $x = 0$ 为其零点。现在取任一以 $x = 0$ 为心且含于 B 的球 B_1，即 $B_1 \subset B$，并记球 B_1 的边界为 Γ，又根据§3.2中有关全连续向量场旋转量的性质5，$x = 0$ 是算子 $K/(\mu_0 - \varepsilon)$ 及 $K/(\mu_0 + \varepsilon)$ 的孤立不动点，而且 $\gamma\left(\frac{1}{\mu_0 - \varepsilon}, 0\right)$ 及 $\gamma\left(\frac{1}{\mu_0 + \varepsilon}, 0\right)$ 都是非零的。确切地说，它们分别为 $(-1)^{\beta_1}$，$(-1)^{\beta_2}$，其中 β_1 为 L 所有大于 $\mu_0 - \varepsilon$ 的特征值的重数和，而 β_2 为 L 所有大于 $\mu_0 + \varepsilon$ 的特征值的重数和（参看[16]）。然而算子 L 在 $(\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$ 中除以 μ_0 为奇重特征值外不再有特征值，因此 $(-1)^{\beta_1}$ 与 $(-1)^{\beta_2}$ 是互为反号的两个数，从而根据§3.2的性质3及4，推得向量场 $x - \frac{1}{\mu_0 + \varepsilon} Kx$ 与 $x - \frac{1}{\mu_0 - \varepsilon} Kx$ 在 Γ 上不可能同伦。

现在证明在任意 $\Gamma \subset B$ 上，当 $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$ 时，向量量场 $\phi\left(\frac{1}{\mu}, x\right) = x - \frac{1}{\mu} Kx$ 存在零点，如不然，则由场同伦的概念推得对所有 $\mu \in [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$，向量场 $\phi\left(\frac{1}{\mu}, x\right)$ 都同伦，这是不可能的，定理得证。

下面转入算子 K 的近似歧点的讨论。与过去一样，设 P_n：$E \to E_n$ 是投影算子，$\dim E_n < +\infty$，$P_n \xrightarrow{p} I$，这时当算子 K 满足前面假定时，对于每一个 n，算子 P_nK 满足

$$P_nK \text{ 列紧，} D\text{-半连续，} P_nK0 = 0. \tag{4.47}$$

而且 P_nK 在 $x=0$ 处有 Fréchet 导数 P_nL，因此

$$P_nK=P_nL+P_nT, \tag{4.48}$$

$$P_nL\in L(E),\ P_nL \text{ 列紧}, \tag{4.49}$$

$$P_nT \text{ 列紧}, D\text{-半连续}, \tag{4.50}$$

$$\frac{\|P_nTx\|}{\|x\|}\longrightarrow 0,\ \text{当}\|x\|\to 0. \tag{4.51}$$

如果我们限制 P_nK 于 $E_n=P_nE$ 时，由于 $\dim E<+\infty$，故

$$P_nK \text{ 和 } P_nT \text{ 均在 } E_n \text{ 上连续}, \tag{4.52}$$

由§4.1的讨论还可得知

$$\sigma(P_nL)\to\sigma(L),\ n\to\infty. \tag{4.53}$$

引理4.2 如果 $\mu\in\rho(L)$ 而且 $\lambda\to\mu$，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $|\lambda-\mu|\leqslant\varepsilon$，$\lambda\in\rho(P_nL)$，$n\geqslant n_0$，而且有常数 c 使得

$$\|(\lambda-P_nL)^{-1}\|\leqslant c,\ n\geqslant n_0,\ |\mu-\lambda|\leqslant\varepsilon. \tag{4.54}$$

证 因为 L 是列紧的，$\mu\in\rho(L)$，$\rho(L)$是开集，故存在 $\varepsilon>0$，使 $|\lambda-\mu|\leqslant\varepsilon$，$\lambda\in\rho(L)$. 今记 $\Lambda=\{\lambda;\ |\lambda-\mu|\leqslant\varepsilon\}$，因 $P_n\xrightarrow{p}I$，故 $P_nL\xrightarrow{cc}L$，利用定理4.1知(4.54)式成立。

引理4.3 若 $\mu\in\rho(L)$，那末存在 n_0 及 $\varepsilon,\alpha>0$ 使得对一切 $n\geqslant n_0$，$|\lambda_n-\mu|\leqslant\varepsilon$，而且

$$P_nKx_n=\lambda_nx_n,\ x_n\neq 0$$

成立时，有$\|x_n\|\geqslant\alpha>0$.

证 采用(4.54)中一样的 c，n_0 及 $\varepsilon>0$，由所设及引理4.2有

$$P_nLx_n+P_nTx=\lambda_nx_n,\ n\geqslant n_0,\ |\lambda_n-\mu|\leqslant\varepsilon,\ x_n\neq 0,$$

$$x_n=(\lambda_n-P_nL)^{-1}(\lambda_n-P_nL)x_n$$

$$=(\lambda_n-P_nL)^{-1}P_nTx_n,$$

从而
$$\|x_n\|\leqslant cd\|Tx_n\|,$$

这里 $\|P_n\|\leqslant d$，由(4.44)知引理成立。

由此立刻得到下面的引理。

引理4.4 若 $\mu\in\rho(L)$，则存在 n_0 及 $\varepsilon,\delta>0$ 使得对一切 $n\geqslant n_0$，$|\lambda_n-\mu|<\varepsilon$，$0<\|x_n\|\leqslant\delta$ 时有 $P_nKx_n\neq\lambda_nx_n$。

定理4.8 设 K：$E\to E$ 列紧、D-半连续，$K0=0$ 并且满足(4.41)～(4.44)，μ 是 L 的非零简单（即单重）特征值，则存在 μ_n，它是 P_nL 的非零简单特征值，$\mu_n\to\mu$，μ_n 还是 P_nK 的歧点，并且对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $n\geqslant n_0$ 时，满足等式

$$P_nKx_n=\lambda_nx_n,\quad |\lambda_n-\mu_n|\leqslant\varepsilon \tag{4.55}$$

的 $\|x_n\|$ 充满区间 $(0,\delta]$。

证 存在 μ_n 是 P_nL 的非零单重特征值以及 $\mu_n\to\mu$ 的论断可由定理4.2及定理4.3得到。如果将 P_nK 局限于 E_n 上，那末定理的其余部分可类同于定理4.7所采用的办法而得到证明，此时，应用引理4.4可以得到对所有 $n\geqslant n_0$，式(4.55)一致成立。

定理4.9 设 K：$E\to E$，$K=L+T$，$K0=0$，其中 L 是线性列紧算子，T 是 D-半连续列紧算子且满足

$$\lim_{\|x\|\to0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=0.$$

还设 μ 是 L 的非零简单特征值，则 μ 是 K 的具有连续分支特征向量的歧点；P_nL 的非零简单特征值 μ_n 就是 K 的近似分歧点且 $\mu_n\to\mu$。又若记

$$S=\{x:\ Kx=(\mu\pm\varepsilon)x,\ \|x\|\leqslant\delta\},$$

$$S_n=\{x_n:\ P_nKx_n=(\mu_n\pm\varepsilon)x_n,\ x_n\in E_n,\ \|x_n\|\leqslant\delta\},$$

则 $S_n \to S$，其中 $\delta, \varepsilon > 0$ 如(4.40)指出是任意给定的常数。

证 根据定理 4.2 及定理 4.4，有 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时存在 $P_n L$ 的简单特征值 μ_n，$\mu_n \to \mu$。如同定理 4.8 那样，取合适的 $\delta > 0$ 及 $0 < \varepsilon < |\mu|$，又设 $\gamma \in (0, \delta]$，于是有 x_n 和 λ_n 使得

$$P_n K x_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n - \mu_n| \leqslant \varepsilon, \quad \|x_n\| = \gamma,$$

显然存在 $N' \subset N$ 及 λ 使

$$\lambda_n \to \lambda, \quad n \in N', \quad |\lambda - \mu| \leqslant \varepsilon,$$

因此 $\lambda \neq 0$。因为 K 是列紧的、D-半连续的，$\lambda_n \to \lambda \neq 0$，故由 (3.164) 式知 $\lambda_n I - P_n K \xrightarrow{dr} \lambda I - K$（离散地）。由 §3.4 引理 3.18，存在 x 使得

$$Kx = \lambda x, \quad |\lambda - \mu| \leqslant \varepsilon, \quad \|x\| = \gamma.$$

收敛性结论可由定理3.15获得。

例4.3 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \lambda f(y), \quad \lambda \neq 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{4.56}$$

它等价于算子方程

$$\mu y = K f(y), \quad y \in E, \tag{4.57}$$

其中 $$E = \{y:\ y \in C[0, 1],\ y(0) = y(1) = 0\},$$

$$K g(x) = \int_0^1 G(x, \xi) g(\xi) d\xi,$$

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ y(1-x), & y \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

显然 Kf：$E \to E$ 是列紧的非线性算子。又设 $f(y)$是实轴上的连续函数且 $f(0)=0$，$f'(0)>0$(不失一般性可以认为 $f'(0)=1$)，Kf 在 $y=0$ 点的导数 $L=Kf'(0)$。

因为方程

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} = \lambda_0 f'(0)\phi$$

在 $E \cap C^2(0, 1)$上的特征值及相应的特征函数为

$$\lambda_0^n = n^2\pi^2, \qquad \phi^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(n\pi x), \quad n=1, 2, \cdots \tag{4.58}$$

故算子 $Kf'(0)$有单重特征值为

$$\mu^{(n)} = \frac{1}{n^2\pi^2}, \tag{4.59}$$

从而(4.59)为算子 Kf 的歧点，即 $n^2\pi^2$ 为(4.56)的歧点。

例4.4 考虑变分问题

$$a(u, v) = \lambda[b(u, v) + (u, v)_H], \quad u, v \in V, \tag{4.60}$$

其中 V、H 均为 Hilbert 空间，$V \subset H$，$\bar{V} = H$ 且 V 往 H 的嵌入是连续的、列紧的。$a(u, v)$ 是 $V \times V$ 上的双线性对称连续泛函，而且满足

$$a(u, v) \geqslant \alpha \|u\|_V^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall u \in V.$$

而 $b(u, v)$ 也是 $V \times V$ 的泛函，但对固定的 $u \in V$，它是 V 上关于 v 的线性有界泛函，当固定 v 时，它是关于 u 的非线性泛函。此外

$$|b(u_1, v) - b(u_2, v)| \leqslant M(u_1, u_2)\|u_1 - u_2\|_V \|v\|_H,$$

$$|b(u,v)|\leqslant\beta(u)\|v\|_V,\quad \beta(u)=o(\|u\|),$$

其中 $u_1, u_2, u, v\in V$；$M(u_1, u_2)$ 是 $V\times V$ 上的有界泛函，$\beta(u)$ 是 V 上的泛函。

还设 λ_0 是线性问题

$$a(u,v)=\lambda(u,v)_H,\ u,v\in V$$

的简单特征值，则 λ_0 是方程（4.60）的分歧点，而它的近似分歧点可由近似特征值问题

$$a(u_n,v_n)=\lambda(u_n,v_n)_H,\ u_n,v_n\in V_n$$

求得，这里 V_n 是 V 的有限维子空间，且$\{V_n\}$终归稠于 V。

事实上，如果我们在 V 中引入新的内积：$(u,v)_*=a(u,v)$，则$\|u\|_*^2=a(u,u)$是 V 的等价范数，仿例4.2的方法，可证存在线性全连续算子 L：$V\to V$ 使

$$(u,v)_H=(Lu,v)_*,u,v\in V.$$

类似地，也存在全连续算子 B：$V\to V$ 使

$$b(u,v)=(Bu,v)_*,$$

故(4.60)可等价于

$$(u,v)_*=\lambda[(Bu,v)_*+(Lu,v)_*]$$

或
$$u=\lambda Bu+\lambda Lu.\tag{4.61}$$

进一步不难验证，(4.61) 中的算子 L 与 B 满足定理4.9中的条件，只不过这时用 $\frac{1}{\lambda}$ 代替了那里的 μ。

最后指出，D-半连续的列紧算子实际上是连续的，因而定理4.9可化为全连续算子的分歧问题，但采用 D-半连续的假定比用连续性假定较容易验证。

附 录 一

紧线性算子的一些基本结论

本附录取材于 Anselone 一书 P113～P120[1] 所罗列的结论。目的在于帮助读者了解正文中用到的有关线性列紧算子以及线性算子中的某些性质。

设 X 是实的或复的 Banach 空间，用 $L(X)$ 表示所有 T：$X\to X$ 的线性有界算子的集合。算子 K 称列紧于 X，当且仅当对每一个有界集 $S\subset X$，$\overline{KS}$ 是列紧的（等价地，KS 是序列列紧或 KS 全有界）。每一个线性列紧算子是有界的，因而 $K\in L(X)$。所有 X 上的列紧线性算子形成 $L(X)$ 的子空间。由于 X 是完备的，因而它也是闭子空间。因为任意有限维线性赋范空间的有界集均为相对紧集，所以如果 $K\in L(X)$ 且 $\dim(KX)<+\infty$，则 K 是列紧的，又当 K 为列紧，T 为有界算子时，KT 及 TK 均为列紧算子，同样，若 $K\in L(X)$ 列紧，则

$$P(K)=a_1K+a_2K^2+\cdots+a_nK^n \quad (a_i \text{ 为纯量})$$

也是列紧的。同理，若 $K\in L(X)$ 列紧，算子 K_n 由式

$$(I-K)^n=I-K_n,\ n=1,2,\cdots$$

定义，则 K_n 也是列紧的，由此若设 $K\in L(X)$ 为列紧算子，对 $I-K$ 能成立的性质，也容易推广到 $(I-K)^n$，$n\geqslant 1$。

下面的 Riesz 引理对研究列紧算子是经常用到的。

引理1 设 $M\subset X$ 是真闭子空间，则对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in X$，使得

$$\|x_\varepsilon\|=1,\ \|x_\varepsilon-y\|\geqslant 1-\varepsilon,\quad \forall y\in M.$$

又若 $\dim M<+\infty$，则存在 $x\in X$，使得

$$\|x\| = 1,\ \|x-y\| \geqslant 1,\quad \forall y \in M.$$

利用这一引理，能够证明当 X 为无限维时，可以产生一无穷序列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n\| = 1$ 且 $\|x_m - x_n\| \geqslant 1$，$n \geqslant 1$，$m \neq n$，由此得到：若 X 的每一个有界集均为相对紧集，其充分且必要条件是 $\dim X < +\infty$。

一个单位算子 $I \in L(X)$ 是列紧的充要条件是 $\dim X < +\infty$，因此，如果 $K \in L(X)$ 是列紧的，那末 $\dim N(I-K) < +\infty$，而且 $\dim N[(I-K)^n] < +\infty$，$n \geqslant 1$，因为由 K 的列紧性及 $Kx = Ix$，$\forall x \in N(I-K)$ 推得 I 在空间 $N(I-K)$ 上列紧。同样，若设 $K \in L(X)$ 列紧，又 K^{-1} 存在，于是 $K^{-1}K = I$，因此 K^{-1} 有界的充要条件是 $\dim X < +\infty$。

但是，下面的结论是成立的。

定理1 设 $K \in L(X)$ 列紧且 $(I-K)^{-1}$ 存在，则 $(I-K)^{-1}$ 有界。

为了证明它，需要用到下面两个引理。

引理2 若 $K \in L(X)$ 是列紧的，$S \subset X$，则

$$S \text{ 闭，有界} \Longrightarrow (I-K)S \text{ 闭.}$$

证 令 $y \in \overline{(I-K)S}$，于是存在无穷序列 $\{x_n\} \subset S$ 使得 $(I-K)x_n \to y$。因为 KS 是序列列紧，于是存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 及 v，使得 $Kx_{n_i} \to v$，令 $x = y + v$，则

$$x_{n_i} = (I-K)\,x_{n_i} + Kx_{n_i} \longrightarrow x,\ x \in S,$$

$$(I-K)\,x_{n_i} \longrightarrow (I-K)x,$$

$$(I-K)x = y,\ y \in (I-K)S,$$

于是 $(I-K)S$ 为闭集，引理成立。

记 $U = \{x \in X:\ \|x\| = 1\}$，它是 X 上的单位球面，若 $T \in$

$L(X)$，则记

$$m(T)=\inf_{x\in U}\|Tx\|=\inf_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

引理3 若 $T\in L(X)$，则

(i) $\exists T^{-1}\Longleftrightarrow 0\overline{\in}TU$,

(ii) $\exists T^{-1}$ 有界 $\Longleftrightarrow 0\overline{\in}\overline{TU}\Longleftrightarrow m(T)>0\Longrightarrow\|T^{-1}\|$

$$=\frac{1}{m(T)},$$

(iii) $\exists T^{-1}$, TU 闭 $\Longrightarrow T^{-1}$ 有界，TX 闭.

证 (i)与(ii)是显然的. 设 T^{-1} 存在，TU 闭，从(i)，(ii)知 T^{-1} 有界；如有 $y\in\overline{TX}$，$y\neq 0$，于是存在 $\{y_n\}\subset TX$，$y_n\to y$ 且 $y_n\neq 0$，$\forall n$. 令 $x_n=T^{-1}y_n$，则 $x_n\neq 0$，$\forall n$，而且$\{x_n\}$是 Cauchy 列，于是$\{\|x_n\|\}$也是 Cauchy 列，假定$\|x_n\|\to r$，因 T 有界而且 $Tx_n=y_n\to y\neq 0$，故 $r\neq 0$. 从而

$$T\left(\frac{rx_n}{\|x_n\|}\right)\longrightarrow y,\quad y\in\overline{T(rU)}.$$

因为 TU 是闭的，$T(rU)$ 也是，故 $y\in T(rU)\subset TX$，因此 TX 也是闭的.

由引理 2，引理 3 立刻得定理 1.

下面的定理 4 将进一步肯定$(I-K)^{-1}\in L(X)$. 为此需要一些别的概念.

假定 X 是任意的线性空间，用Ⓗ表示 X 的零子空间，$L(X)$ 表示所有 T: $X\to X$ 的有界线性算子组成的集合，如果逆算子存在时，用 T^{-1} 表示 T 的逆，对每一个 $T\in L(X)$，用 $T^{\sim 1}$ 表示 T 的集合函数逆，即

$$T^{\sim 1}D=\{x\in X: Tx\in D\},\quad D\subset X.$$

特别，$T^{\sim 1}$Ⓗ $=N(T)$，如果定义 $T^{\sim n}=(T^n)^{\sim 1}$，$n=0, 1, \cdots$,

则 $T^{-n}\Theta=N(T^n)$，利用表达式

$$T^{-m}T^{-n}=T^{-(m+n)},\quad T^mT^n=T^{(m+n)}$$

容易得知，对每一个 $T\in L(X)$，存在唯一的并称之为升指数 $\alpha=\alpha(T)$ 及降指数 $\delta=\delta(T)$ 的非负整数或 $+\infty$，使得当 $n=0,1,2,\cdots$ 时

$$T^{-n}\Theta\subsetneqq T^{-(n+1)}\Theta\Longleftrightarrow n<\alpha,$$

$$T^nX\supsetneqq T^{n+1}X\Longleftrightarrow n<\delta,$$

由于 $T^{-0}\Theta=\Theta$，$T^0X=X$，故 $\alpha=0\Longleftrightarrow T^{-1}$ 存在，$\delta=0\Longleftrightarrow TX=X$。

定理 2 设 $T\in L(X)$，$\alpha=\alpha(T)<+\infty,\delta=\delta(T)<+\infty$，则 $\alpha=\delta$，而且 T^{-1} 存在的充要条件是 $TX=X$。

证 设 $x\in X$，$D\subset X$，$m\geqslant 0$，于是

$$T^{-1}Tx=x+T^{-1}\Theta,\qquad T^{-1}TD=D+T^{-1}\Theta,$$

$$TD=TX\Longleftrightarrow X=D+T^{-1}\Theta,$$

$$T^mD=T^mX\Longleftrightarrow X=D+T^{-m}\Theta.$$

对于任意的 $m\geqslant 0$ 及 $n\geqslant 1$，由 δ 的定义知

$$\delta\leqslant m\Longleftrightarrow T^m(T^nX)=T^mX\Longleftrightarrow X=T^nX+T^{-m}\Theta,$$

从而推得

$$X=T^nX+T^{-\delta}\Theta,\quad n\geqslant 0.$$

又根据 α 的定义，有 $T^{-\alpha}\Theta\supset T^{-\delta}\Theta$，从而据上式

$$X=T^nX+T^{-\alpha}\Theta,\quad n\geqslant 0,$$

可见 $\delta\leqslant\alpha$。

另一方面，对于 $D\subset X$ 和 $m\geqslant 0$，有

$$TT^{-1}D = TX \cap D,$$

$$T^{-1}D = T^{-1}\Theta \Longleftrightarrow TX \cap D = \Theta,$$

$$T^{-m}D = T^{-m}\Theta \Longleftrightarrow T^m X \cap D = \Theta.$$

又对于任意 $m \geqslant 0$ 和 $n \geqslant 1$，由 α 的定义知

$$\alpha \leqslant m \Longleftrightarrow T^{-m}T^{-n}\Theta = T^{-m}\Theta \Longleftrightarrow T^m X \cap T^{-n}\Theta = \Theta,$$

从而推得

$$T^{\alpha} X \cap T^{-n}\Theta = \Theta, \quad n \geqslant 0 .$$

类似地，根据 δ 的定义，$T^{\delta}X \subset T^{\alpha}X$，于是有

$$T^{\alpha} X \cap T^{-n}\Theta = \Theta, \ n \geqslant 0 ,$$

故得 $\alpha \leqslant \delta$，因此 $\alpha = \delta$。

定理的最后部分根据前面所述是明显的。

定理 3 设 X 为Banach 空间，若 $K \in L(X)$ 列紧，则 $\alpha(I-K) = \delta(I-K) < +\infty$。

证 因为 $N((I-K)^{n-1}) \subsetneqq N((I-K)^n)$，$1 \leqslant n \leqslant \alpha(I-K)$，由引理 1 知存在 $x_n \in N((I-K)^n)$使得

$$\|x_n\| = 1, \quad \|x_n - v\| \geqslant 1, \quad \forall v \in N((I-K)^{n-1}).$$

对任意的整数 m，n，$1 \leqslant m < n \leqslant \alpha(I-K)$，于上式取

$$v = x_m - (I-K)x_m + (I-K)x_n \in N((I-K)^{n-1}),$$

便得

$$\|Kx_n - Kx_m\| \geqslant 1 .$$

如果 $\alpha(I-K) = +\infty$，上述不等式与 K 的列紧性相矛盾。类似地也可得 $\delta(I-K) < +\infty$，由定理2知 $\delta(I-K) = \alpha(I-K)$。

下面我们给出列紧 算子的 Fredholm 择一定理，首先回顾一下有关余维概念。设 M 为 X 的子空间，如果又有子空间 N，使得 $X = M \oplus N$，那末 N 的维数 $n \leqslant +\infty$便称为 M 的余维，并

记 $\operatorname{codim}M = n$.

定理 4 设 $K \in L(X)$ 列紧，则

(i) $\exists (I-K)^{-1} \Longleftrightarrow (I-K)X = X \Longrightarrow (I-K)^{-1} \in L(X)$,

(ii) $\dim N(I-K) = \operatorname{codim}(I-K)X$.

证 由定理 1 ～ 3 推得 (i) 成立。记 $n(K) = \min(\dim N(I-K), \operatorname{codim}(I-K)X)$，因为 $n(K)$ 有限，如果 $n(K) = 0$，那末由于(i)成立，从而(ii)也成立。假定 $n(K) \geqslant 1$，故存在非零元 $u \in N(I-K)$ 及 $v \overline{\in} (I-K)X$；由 Hahn-Banach 定理，在 X 上存在有界线性泛函 φ，使 $\varphi(u) \neq 0$；定义 $Lx = \varphi(x)v$，显然 $L \in L(X)$ 而且 L 是列紧的。$n(K+L) = n(K) - 1$，从而可归纳得(ii)。关于本定理中(ii)的证明细节，读者也可从关肇直等著的《线性泛函分析入门》一书第三章第四节中得知。

当 $\lambda \neq 0$ 时，由于 $(\lambda I - K) = \lambda(I - \lambda^{-1}K)$，因此上面对于 $I-K$ 论述的结果同样适用于 $(\lambda I - K)$。由定理 1 和 4 推出：如果 $K \in L(X)$ 为列紧算子，当 $\lambda \neq 0$ 时，λ 或者是 K 的特征值，或者 $(\lambda I - K)^{-1} \in L(X)$。对 $\lambda = 0$ 的情形，不同点是或者 0 为 K 的特征值，或者 K^{-1} 存在，但只有 $\dim X < +\infty$ 时才能使 $K^{-1} \in L(X)$。另外，定理 4 的(ii)还说明算子 $(I-K)$ 的零空间的维数与其共轭算子 $(I-K)^*$ 的零空间的维数相等，因为 $\dim N(I-K) = \operatorname{codim} R(I-K) = \dim N((I-K)^*)$。

下面的定理 5 刻划了列紧算子 K 的特征值的个数，其证明可以直接由引理 1 得到。

定理 5 设 $K \in L(X)$ 列紧，则 K 的特征值或者是一个有限集，或者是一个以 0 为极限的无穷序列。

附 录 二

Соболев 空间的定义及嵌入定理

本附录将简要介绍正文中用到的广义导数及 Соболев 空间概念，并且不加证明地给出常用的嵌入定理。

设 Ω 为 n 维欧氏空间中的有界域(开的，不一定连通)，记

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{\alpha_1}\,\partial x_2{}^{\alpha_2}\cdots\partial x_n{}^{\alpha_n}}\quad,\qquad \begin{aligned}|\alpha|&=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\\ \alpha&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\end{aligned}$$

定义一 一个在 Ω 上局部可积(即任一闭集 $\Omega_1\subset\Omega$ 上均可积)的函数 $u(x)$，如果存在另一个局部可积函数 $f(x)$满足

$$\int_\Omega f\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 u 有 α 级广义微商，并记 $D^\alpha u=f$，这里 $C_0^\infty(\Omega)$表示于 Ω 无穷次连续可微且支集是属于 Ω 内部的函数类。

广义微商如果存在则必唯一。

一些作者也采用下面等价的方式定义广义微商。

定义二 一个在 Ω 上局部可积的函数 u，若存在 Ω 上局部可积的函数 $f(x)$，使得

$$\int_\Omega f\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx,\quad \forall\varphi\in C_0^{|\alpha|}(\Omega),$$

则称 u 有 α 级广义微商，这里 $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$为支集在 Ω 内部并具有 α 次连续微商的函数集合。

定义三 Ω 上的局部可积函数 f 称为 Ω 上的局部可积函数 u 的 α 次广义微商，如果存在在Ω内 α 次连续可微函数$\{\varphi_m\}$，

使得 $\varphi_m(x)$，$D^\alpha\varphi_m(x)$ 于 Ω' 上在 L 范数意义下收敛于 u 和 f，其中 $\Omega'\subset\Omega$ 为其任一真子域。

具有广义微商的函数与函数的绝对连续性有着密切的关系。考虑一维情形，设 D 为开区间 $(0,1)$，如果 u 在 $[0,1]$ 上绝对连续，于是古典微商 $u'(x)$ 几乎处处存在且可积，根据分部积分公式有

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)u'(x)dx,\quad \forall\varphi\in C_0^1(0,1),$$

此即表示 $u'(x)$ 是广义微商；反之，若 $u(x)\in L(0,1)$ 且其广义微商 $\dfrac{du(x)}{dx}$ 于 $(0,1)$ 上也局部可积，则 $u(x)$ 必等价于 $[0,1]$ 上的某一绝对连续函数。对多变量情形也有类似的结论。

下面给出 Соболев 空间的定义。我们仍然假设 Ω 为 R^n 中的有界开域，m 为整数，$p\geqslant 1$。

定义四 记 $W_p^m(\Omega)$ 为所有在 Ω 上具有 $|\alpha|\leqslant m$ 级广义微商且广义微商属于 $L^p(\Omega)$ 的函数的集合。即

$$W_p^m(\Omega)=\{u: D^\alpha u\in L_p(\Omega),\quad \forall\,|\alpha|\leqslant m\}.$$

如果在集合 $W_p^m(\Omega)$ 中引入范数

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

那末集合 $W_p^m(\Omega)$ 便称为 **Соболев 空间**，并称范数 $\|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ 为 **Соболев 范数**。

不难证明，Соболев 空间是 Banach 空间。

作为特例，显然 $W_p^0(\Omega)=L^p(\Omega)$，又如果 $p=2$，此时记 $W_2^m(\Omega)$ 为 $H^m(\Omega)$。显然 $H^m(\Omega)$ 为 Hilbert 空间，其内积定义为

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

一些作者以另一形式定义 Соболев 空间。

定义五 以 $\hat{C}^\infty(\Omega)$表示一切于 Ω 无穷次连续可微且其 Соболев 范数为有限的空间，定义 $W_p^m(\Omega)$ 为 $\hat{C}^\infty(\Omega)$ 关于 Соболев 范数的闭包所成的函数集合。

可以证明：定义四与定义五等价。

定义六 称 $C_0^\infty(\Omega)$在 Соболев 范数下的完备集为空间 $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$。如 $p=2$，则记为 $H_0^m(\Omega)$.

显然，$\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$.

对于给定的 $u, v \in H^1(\Omega)$如下的 Green 公式成立

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma uv\gamma_i d\gamma, 1 \leq i \leq n,$$

其中 $\Gamma = \partial\Omega$ 满足 Lipschitz 条件，$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$为单位外法向量. 由此，如果用$\frac{\partial u}{\partial x_i}$代替 u，对 i 求和，则对任意 $u \in H^2(\Omega)$，$v \in H'(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \Delta uv dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \gamma} v d\gamma,$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ，作为一个推论，对 $u, v \in H^2(\Omega)$

$$\int_\Omega (u\Delta v - \Delta uv) dx = \int_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial \gamma} - \frac{\partial u}{\partial \gamma} v) d\gamma,$$

在$H^m(\Omega)$空间中，经常使用半范数

$$|u|_m = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

又当 Ω 为有界时，存在常数 $c(\Omega)$ 使得

$$|u|_0 \leqslant c(\Omega)|u|_1 \quad , \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

因此，在 $H_0^m(\Omega)$ 空间中，半范数 $|\cdot|_m$ 与范数 $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ 等价。

下面转入到嵌入定理的叙述．为此首先给出锥条件区域的概念．一个有界开域 $\Omega \subset R^n$ 称为满足锥条件，如果存在一个以 x 为顶点，ρ 为半径的 n 维锥 $C_\rho(x)$，使得任一点 $y \in \Omega$，都有以它为顶的锥 $C_\rho(y) \subset \Omega$ 与某一方向的 $C_\rho(x)$ 相重合。

定理一 设 $\Omega \subset R^n$ 是满足锥条件的有界域，k 是满足不等式 $(m-k)p > n$ 的非负整数，则任何 $u(x) \in W_p{}^m(\Omega)$ 必属于 $\overline{C}^k(\Omega)$ 且有与之无关的常数 M，使

$$\|u\|_{\overline{C}^k(\Omega)} \leqslant M\|u\|_{W_p^m(\Omega)}.$$

此外，嵌入算子 $I: W_p^m(\Omega) \longrightarrow \overline{C}^k(\Omega)$ 是列紧的，即任一在 $W_p{}^m(\Omega)$ 中的有界集，为 $\overline{C}^k(\Omega)$ 中的相对紧集，其中 $\overline{C}^k(\Omega)$ 是于 Ω 有直到 k 阶有界连续导数的函数空间，其范数为

$$\|u\|_{\overline{C}^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

定理二 设 $\Omega \subset R^n$ 为满足锥条件的有界区域，$p > 1$，$mp \leqslant n$，Γ_s 是 Ω 的 s 维光滑流形，而 $n - mp < s \leqslant n$，$u(x) \in W_p{}^m(\Omega)$，则 $u(x) \in L^l(\Gamma_s)$，其中 $l < ps/(n-mp)$，而且存在 M 使得

$$\|u\|_{L^l(\Gamma_S)} \leqslant M\|u\|_{W_p{}^m(\Omega)}.$$

此外嵌入算子 $I: W_p^m(\Omega) \to L^l(\Gamma_s)$ 是列紧的。

定理三 设 $\Omega \subset R^n$ 满足锥条件的有界区域，$|\beta| \geqslant m - n/p$，$s > n - p(m-|\beta|)$，$l < ps/[n - p(m-|\beta|)]$；$\Gamma_s$ 是 Ω 内的 s 维光滑流形，$u \in W_p{}^m(\Omega)$，则存在常数 M 满足

$$\|D^{\beta}u\|_{L^l(\Gamma_s)} \leqslant M\|u\|_{W_p{}^m(\Omega)}.$$

而且嵌入算子 I：$W_p{}^m(\Omega)\longrightarrow L^l(\Gamma_s)$是列紧的，特别当 $s=n$ 时，嵌入算子 I：$W_p{}^m(\Omega)\longrightarrow W_q{}^{|\beta|}(\Omega)$是列紧的，其中 $q<np/[n-p(m-|\beta|)]$。

定理四 设 $\Omega\subset R^n$ 是满足锥条件的有界区域，则当 $m_1>m_2\geqslant 0$ 时，$W_2{}^{m_1}(\Omega)$往 $W_2{}^{m_2}(\Omega)$的嵌入算子是列紧的。

上述诸定理的证明可参考一般论述 Соболев 空间的专著，例如 Соболев《泛函分析在数学物理中的应用》一书。

附 录 三

Fréchet 导数

设 X、Y 均为 Banach 空间，记 $L(X, Y)$ 为所有 $X\to Y$ 的线性有界算子的集合，用 $S(x, r)$表示以 x 为心，r 为半径的球。

定义一 设 $y=P(x)$是由 Banach 空间 X 的某个开子集 $D(P)$到 Y 的非线性算子，我们说 $y=P(x)$在点 $x_o\in D(P)$处是 Fréchet 可微的，是指存在一个算子 $H\in L(X, Y)$，使得对于某一正数 δ 与$S(x_o, \delta)\cap D(\mathrm{P})$中任意一点 $x_o+\Delta x$，有

$$P(x_o+\Delta x)-P(x_o)=H\cdot\Delta x+\omega(x_o, \Delta x),$$

其中 $$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=0,$$

则称 H 为 $P(x)$在 $x=x_o$ 的 Fréchet 导数，并记作 $H=P'(x)$。如果 $P'(x)$在 X 中的某区域 G 的每一点都存在，那末就说 P 在 G 中是可微的，而 $P'(x)$是由 G 到 $L(X, Y)$中的算子（一般是非线性的）。算子 P 称为在区域 G 是一致的 Fréchet 可

微，如果

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\frac{\|\omega(x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=0$$

关于 $x\in G$ 一致地成立。

显然，如果 $P(x)$在 x_o 处可微，则其导数是唯一的，而且 $P(x)$在 x_o 处是连续的。设 $P=aP_1+bP_2$(a, b为常数)，$P_1'(x_o)$, $P_2'(x_o)$存在，则$P'(x_o)$也存在，且$P'(x_o)=aP_1'(x_o)+bP'_2(x_o)$。任何线性有界算子 P 在任一点 x_0 都是可微的，且 Fréchet 导数就是其自身，即 $P'(x_o)=P$。又若 $P(x)$是由 Banach 空间的区域 G 到 Y 中的可微算子，而 $Q(y)$是由Y中某区域 $D(Q)$($D(Q)\supset P(G)$)到 Banach 空间 Z 中的可微算子，那末 $A=Q(P(x))$ 是由 G 到 Z 中的可微算子，并且对于 $x_o\in G$

$$(QP)'(x_o)=Q'(P(x_o))\cdot P'(x_o).$$

特别如果 Q 是 Y 到 Z 中的线性算子，那末

$$(QP)'(x)=Q\cdot P'(x).$$

类似地可以定义高阶导数。

定义二 设 $P:G\subset X\to Y$ 是可微算子，如果 $P'(x)$ 在点 $x_o\in G$ 又是可微的，那末称算子 $P(x)$在 x_o 处有二阶导数并且记 $(P'(x_o))'=P''(x_o)$。同样可定义 n 阶导数为

$$P^{(n)}(x)=(P^{(n-1)}(x))'.$$

如前所述，对于固定的 $x_0\in G$, $P'(x_0)\in L(X,Y)$，所以 $P'(x)$是由 G 到 $L(X,Y)$的（非线性）算子，从而对于固定的 x_0, $P''(x_0)$ 是 $L(X,L(X,Y))$ 中的元，于是对于 x, $z\in X$, $(P''(x_0)x)z$ 可以看成是 $X\times X$ 到 Y 的双线性型，并简记它为 $P''(x_0)xz$。同理用 $P^{(n)}(x_0)x_1x_2\cdots x_n$ 表示由 $P^{(n)}(x_0)$ 引出的 n-线性型。

定理一 设 $P(x)$：$G\subset X\to Y$ 是可微算子，取 Δx，使 $x_0+\Delta x\in G$，则有下述有限增量公式

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)\|\leqslant\sup_{\substack{\tilde{x}=x_0+\theta\Delta x\\0<\theta<1}}\|P'(\tilde{x})\|\|\Delta x\|$$

及带余项的有限增量公式

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\Delta x\|$$

$$\leqslant\sup_{0<\theta<1}\|P'(x_0+\theta\Delta x)-P'(x_0)\|\cdot\|\Delta x\|.$$

定理二 如果 $P(x)$：$G\subset X\to Y$ 是具有二阶导数的算子且 x_0，$x_0+\Delta x\in G$，则有

$$\|P(x_0+\Delta x)-P(x_0)-P'(x_0)\Delta x\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{\substack{\tilde{x}=x_0+\theta\Delta x\\0<\theta<1}}\|P''(\tilde{x})\|\cdot\|\Delta x\|^2.$$

虽然有上述定理一，二，但并不意味着有类同于微积分中的中值定理，然而对于 Banach 空间 X 中的泛函，在更一般些的微分概念下，中值定理仍然成立。

定义三 设 $P(x)$：$G\subset X\to Y$ 的算子，用 λ 表示实变量，对任意 $h\in G$（使 $P(x_0+\lambda h)$ 当 λ 足够小时有意义），当

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{P(x_0+\lambda h)-P(x_0)}{\lambda}$$

存在时，称 $P(x)$在 x_0 处是 Gateaux 可微的，而上面的极限叫做 $P(x)$在 x_0 处对应于增量 h 的微分并表示成 $DP(x_0,h)$，特别当 $Y=R$（实数空间），即 $P(x)$是 X 上的泛函数 $f(x)$时，此时 Gateaux 微分也叫做 $f(x)$对应于增量 h 的微分．又如果算

子 $P(x)$ 在 x_0 点处有 Fréchet 导数，那末 $P'(x_0)h$ 叫做对应于增量 h 的 Fr chet 微分，不难证明，由 Fréchet 微分的存在可推得 Gateaux 微分的存在，并且二者相等，反之则不一定。

定理三 设泛函 $f(x)$ 的 Gateaux 微分 $Df(x, h)$ 在 Banach 空间 X 的一个开凸集 G 的每一点存在，那末对任意点 x、$x+h\in G$，下列 Lagrange 公式（或称中值公式）成立，即存在实数 τ 使

$$f(x+h)-f(x)=Df(x+\tau h, h),\ 0<\tau<1.$$

定理四 设 $P(x)$ 是定义在 Banach 空间 X 中的某开凸集 G 上而在其共轭空间 X^* 中取值的有线性 Gateaux 微分的算子，那末，对于 $x, x+z\in G$ 以及任意 $h\in X$，必存在实数 τ（与 h 有关）使 $0<\tau<1$ 而且

$$(P(x+z)-P(x))h=DP(x+\tau z, z)h.$$

上述定理的详细证明可参看关肇直《泛函分析讲义》。定理三也称为泛函的中值定理。

上面已经提到，算子的 Gateaux 微分存在推不出 Fréchet 微分也存在，但是对于泛函，应用上面的中值定理可以推得：如果它的梯度在某点邻域存在且连续时，可推得 Fréchet 微分在这点也存在，而且在这点的两种微分相等。

最后有必要指出，如果算子 $P(x)$ 是实泛函 $f(x)$ 的梯度，那末对任何 $x, x_0\in X$，只要 $\langle P(x_0+t(x-x_0)), x-x_0\rangle$ 于区间 $[0, 1]$ 关于 t 可积分，则 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=f(x_0)+\int_0^1\langle P(x_0+t(x-x_0)), x-x_0\rangle dt.$$

显然，当 $\langle P(x_0+t(x-x_0)), x-x_0\rangle$ 关于 t 于 $[0, 1]$ 上连续时，则它一定是可积分的。

参考文献

[1] Anselone, P. M., *Collectively compact operator approximation theory*, Prentice-Hall, 1971.

[2] Anselone, P. M. and Ansorge, R., *Compactness principles in nonlinear operator approximation theory*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 1(6) (1979), 589-618.

[3] Anselone, P. M. and Lei Jin-gan (雷晋干), *The approximate solution of monotone nonlinear operator equation*, R. M. J. Math., 16(4)1986, 791—801.

[4] Anselone, P. M. and Lei Jin-gan (雷晋干), *Nonlinear operator approximation theory based on demi-regular convergence*, Acta. Math. Scientia, 6(2), 1986. 121—132.

[5] Brezzi, F. et al., *Finite dimensional approximation of nonlinear problems*, I, II, III, Numer. Math., 36(1980), 1—25. 37(1981), 1—28. 38(1981), 1—30.

[6] Bristean, M. O. et. al., *On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element method*, Comp. Math. Appl. Mech. Eng., 17/18(1979), 618—657.

[7] Chatelin, F., *Spectral approximation of linear operators*, Academic Press, New York, 1983.

[8] Cheney, E. W., 逼近论导引(中译本), 上海科学技术出版社, 1981.

[9] Ciarlet, P. G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Company, 1978.

[10] Li Kai-tai (李开泰), Huang Ai-xiang (黄艾香), *Mathematical aspect of optimal control finite element method for Navier-Stokes problems*, J. Comp. Math., 2(2), 1984, 139—151.

[11] Milne, R. D., *Applied functional analysis*, Pitman Advanced Publishig Program, 1980.

[12] Oden, J. T., Reddy, J. N., *An introduction to the mathematical theory of finite elements*, John Wiley & Sons, New York, 1976.

[13] Petryshyn, W. V., *On the approximation solvability of equations involving a-proper and pseudo-a-proper mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 81(2), 1975, 223—312

[14] Vainberg, M. M., *Variational method and methods of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Wiley, New York 1973.

[15] Vainikko, G. M., *Approximative methods for nonlinear equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Method & Applications, 2(6), 1978, 647—687.

[16] Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956.

[17] Красносельский, М. А., Приближенное решение операторных уравнений, Москва, 1969.

[18] Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 科学出版社, 1985.

[19] Михлин, С. Г., Численная реализация вариационных методов, Москва, 1966.

[20] И. П. 纳唐松, 函数构造论, 科学出版社, 1958.

[21] 李荣华, 解边值问题的 Galerkin 方法, 上海科学技术出版

社（待印）。

［22］ 杨一鄯，关于单调—全连续型组合算子方程有限元解的收敛性，武汉大学学报，数学专刊Ⅱ，1982，89—98.

［23］ 费泰生，一类算子方程的解及其近似解的讨论，数学杂志，2(3)，1982，239—246.

［24］ 曾钟钢，一种单纯形算法及其在求解非线性算子方程中的应用，数学杂志，4(2)，1984，157—164.

［25］ 雷晋干，算子组合的不动点定理及其应用，武汉大学学报，1980，Ⅰ，40—43.

［26］ 雷晋干，黄象鼎，关于投影法的收敛性及算法稳定性，数学研究报告，15期，1982，52—56.

［27］ 雷晋干，陈毓屏，周世军，解非线性边值问题的投影压缩迭代法，数学研究报告，15期，1982，57—63.

［28］ 雷晋干，黄象鼎，关于线性算子方程的具有扰动的投影解，数学杂志，5(2)，1985，181—190.

［29］ 陈铭俊，陈仲英，单调算子方程的构造可解性（待发表）。

［30］ 马富明，一类非线性算子方程的 Galerkin 近似，东北数学，1(2)，1985，223—233.

［31］ 马亚南，武云海，关于 Vainikko 定理及其应用(待发表)。

［32］ 曾钟钢，试论同伦不动点算法与 $(S)_\lambda+$ 算子方程的投影解（硕士论文)，武汉大学，1984.

［33］ 周世军，某些算子方程解的存在性及数值实现（硕士论文），武汉大学，1984.

术 语 索 引